ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCV.

1908

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1908

bole l'altra ellisse, quelle nel piano per l'asse minore sono ellissi (¹); *e distribuibili altresì in coppie formate ciascuna di una ellisse e di un'iperbole focali l'una dell'altra, e focali con una sezione principale della quadrica centrale.*

β) *nel caso in cui la quadrica centrale è di rotazione, da una quadrica concentrica pure di rotazione che ha con quella in comune il piano equatoriale, che giace nello spazio condotto per questo piano normalmente allo spazio centrale, e che è un ellissoide, o un iperboloide, secondochè la quadrica centrale è schiacciata, o allungata.*

Restano a considerarsi il caso in cui la Q_2 è una sfera, nel qual caso tutte le posizioni intorno al centro sono posizioni di equilibrio, e quelli nei quali la Q_2 degenera. In questi ultimi casi le forze del sistema sono parallele ad uno stesso spazio senza essere parallele ad un medesimo piano, o sono parallele ad uno stesso piano senza essere parallele ad una medesima retta. Non è difficile modellare la loro trattazione su quanto venne precedentemente detto, nè è difficile, seguendo la via indicata, trattare il problema analogo in S_n per $n > 4$.

Stretto legame esiste fra il presente lavoro ed i seguenti:

1° Del Re. — *Sulle quattro rotazioni che sovrappongono un triedro trirettangolo sopra un triedro trirettangolo* etc. Rend. Acc., Napoli, anno 1904.

2° Del Re. — *Sulle focali di Minding*. Rend. Acc. dei Lincei, 1905.

3° Del Re. — *La Astatica e le sue rappresentazioni prospettiche*. Rend. Acc. Napoli, 1906.

Meccanica. — *Sul moto di un corpo pesante intorno a un punto fisso*. Nota del prof. R. Marcolongo, presentata dal Socio V. Cerruti.

Il sig. Stäckel ha recentemente (²) richiamata l'attenzione dei matematici su di un notevole contributo arrecato nel 1903 dal matematico russo sig. P. A. Schiff, allo studio del moto del giroscopio pesante (³). Il signor Schiff ha considerato quei movimenti nei quali resta costante la grandezza del vettore momento dell'impulso e che possono essere studiati col sussidio

(¹) È superfluo avvertire che qui con le parole *asse maggiore, medio, minore* intendiamo riferirci rispettivamente agli assi pei quali $\lambda^2 > \mu^2 > \nu^2$.

(²) *Ausgezeichnete Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels.* [Mathematische Ann. Bd. 65, pp. 538-555 (1908)].

(³) *Sulle equazioni differenziali del movimento di un corpo pesante intorno a un punto fisso.* [Raccolta matematica di Mosca, v. 24, pp. 169-177 (1903)].

delle funzioni abeliane; ed ha, assai felicemente, sostituito alle equazioni euleriane, usualmente poste a base di ogni studio sul giroscopio, tre sole equazioni differenziali del primo ordine, assumendo come incognite da determinarsi: l'energia cinetica, la grandezza del vettore momento dell'impulso, e la componente di questo secondo la congiungente il punto fisso col centro di massa del corpo.

Una sostituzione analoga era stata, da tempo, eseguita da W. Hess (1), ed ha condotto, com'è noto, alla scoperta di quel caso interessante di movimento, detto appunto di Hess e studiato poscia così profondamente dal sig. Nekrassoff (2).

Il sig. Stäckel ha sviluppate le ricerche dello Schiff servendosi, in parte, dei metodi del calcolo vettoriale e supponendo sempre riferito il corpo agli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso. L'uso costante dei metodi vettoriali permette invece di sviluppare le ricerche dello Schiff e dello Stäckel, senza fare nessuna speciale ipotesi relativamente agli assi di riferimento, in modo assai più spedito e diretto, e inoltre permette ancora di trattare con grande semplicità alcuni casi particolari che si incontrano in queste ricerche. Ed è appunto ciò che vogliamo mostrare nella breve Nota seguente.

1. Diremo: O il punto fisso; G il centro di massa del corpo; $\mathfrak{M}$ il vettore momento dell'impulso relativo ad O; T l'energia cinetica; Ω il vettore della velocità istantanea di rotazione del corpo; $\mathbf{k}$ un vettore unità parallelo alla verticale del punto O, positiva verso l'alto (3). Ricordiamo inoltre che

$$2\mathrm{T} = \Omega \times \mathfrak{M}, \tag{1}$$

e che l'incremento $d\mathrm{T}$ d'energia cinetica può esprimersi in doppio modo così:

$$d\mathrm{T} = \Omega \times d\mathfrak{M} = \mathfrak{M} \times d\Omega. \tag{2}$$

Se rappresentiamo con l'unità positiva il peso del corpo, l'equazione del mo-

(1) *Ueber die Euler'schen Bewegungsgleichungen und über eine neue particuläre Lösung des Problems der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt.* [Mathem. Ann., Bd. 37, pp. 153-181 (1890)].

(2) *Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe.* [Mathem. Ann., Bd. 47, pp. 445-530 (1896)].

(3) Mi valgo delle notazioni del mio libro: *Meccanica Razionale*, vol. II, cap. V, Milano, Hoepli, 1905; per le notazioni del calcolo vettoriale mi valgo di quelle proposte dal prof. Burali-Forti e da me in varii articoli dei *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, voll. XXIII e XXIV (1907); e voll. XXV e XXVI (1908).

vimento assume la forma (teorema dell' impulso)

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -(\mathrm{G}-0) \wedge \mathbf{k}\,. \tag{3}$$

Opereremo sulla (3) moltiplicando scalarmente per Ω e tenendo presente la (2) e la

$$\frac{d\mathrm{G}}{dt} = \Omega \wedge (\mathrm{G}-0)\ ; \tag{4}$$

otterremo

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = -\Omega \times (\mathrm{G}-0) \wedge \mathbf{k} = -\Omega \wedge (\mathrm{G}-0) \times \mathbf{k} = -\frac{d}{dt}\left\{ (\mathrm{G}-0) \times \mathbf{k} \right\},$$

e quindi

$$\mathrm{T} = -(\mathrm{G}-0) \times \mathbf{k} + h \tag{5}$$

che è l' integrale delle forze vive.

Moltiplicando scalarmente per $\mathbf{k}$ la (3), si ottiene subito

$$\mathbf{k} \times \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 0\ ,$$

cioè

$$\mathfrak{M} \times \mathbf{k} = m = \mathrm{cost}\ ; \tag{6}$$

la quale dice che *è costante la proiezione verticale del vettore momento dell' impulso*; od anche: *la prima curva d' impulso è contenuta in un piano orizzontale.*

Successivamente troveremo

$$\mathfrak{M} \times \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = (\mathrm{G}-0) \wedge \mathfrak{M} \times \mathbf{k} = \tfrac{1}{2}\,\frac{d\mathfrak{M}^2}{dt}\ , \tag{7}$$

$$(\mathrm{G}-0) \times \frac{d\mathfrak{M}}{dt} = 0\ ;$$

e però

$$\frac{d}{dt}\left\{ (\mathrm{G}-0) \times \mathfrak{M} \right\} = \frac{d\mathrm{G}}{dt} \times \mathfrak{M} = (\mathrm{G}-0) \wedge \mathfrak{M} \times \Omega\,. \tag{8}$$

Se dunque poniamo

$$\left\{ \begin{array}{lll} \mathbf{a} = \mathrm{G}-0\ , & \mathbf{b} = \mathfrak{M}\ , & \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \\ 2\mathrm{U} = \mathfrak{M}^2 = \mathbf{b}^2\ , & \mathrm{S} = (\mathrm{G}-0) \times \mathfrak{M} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}\,, & \end{array} \right. \tag{9}$$

le (5), (6), (7), (8) diventano rispettivamente:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{k} = h - \mathrm{T}\ ,\quad \mathbf{b} \times \mathbf{k} = m\ ,\quad \mathbf{c} \times \mathbf{k} = \frac{d\mathrm{U}}{dt} \tag{10}$$

$$\mathbf{c} \times \Omega = \frac{d\mathrm{S}}{dt}\,. \tag{11}$$

2. Dal sistema (10) possiamo agevolmente ricavare $\mathbf{k}$ e si trova (com'è del resto facile verificare)

$$\mathbf{k} = \frac{(h-\mathrm{T})\,\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} + m\mathbf{c}\wedge\mathbf{a} + \frac{d\mathrm{U}}{dt}\,\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}}{\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\times\mathbf{c}}\,, \tag{12}$$

purchè il denominatore, cioè $(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})^2$, sia diverso da zero. Escludiamo, per ora, questo caso.

Quadrando la (12) ed osservando che si ha identicamente [1]

$$(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})^2 = \mathbf{b}^2\,\mathbf{c}^2 \quad ; \quad (\mathbf{c}\wedge\mathbf{a})^2 = \mathbf{c}^2\mathbf{a}^2 \quad ; \quad (\mathbf{b}\wedge\mathbf{c})\times(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,.\,\mathbf{c}^2,$$

si trova subito:

$$\left(\frac{d\mathrm{U}}{dt}\right)^2 = (\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\,(2\mathrm{U}-m^2) + 2m\mathrm{S}(h-\mathrm{T}) - \mathrm{S}^2 - 2\mathrm{U}(h-\mathrm{T})^2, \tag{13}$$

la quale esprime $\frac{d\mathrm{U}}{dt}$ mediante T, U, S e grandezze che restano costanti durante il movimento.

Sostituiamo il valore (12) nella

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = (\mathrm{G}-\mathrm{O})\wedge\mathfrak{M}\times\mathbf{k}\,;$$

ed osserviamo ancora che si ha identicamente:

$$\{(\mathrm{G}-\mathrm{O})\wedge\Omega\}\times(\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}) = \mathrm{S}\,\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,,$$

$$\{(\mathrm{G}-\mathrm{O})\wedge\Omega\}\times(\mathbf{c}\wedge\mathbf{a}) = -(\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\,\frac{d\mathrm{S}}{dt}\,;$$

$$\{(\mathrm{G}-\mathrm{O})\wedge\Omega\}\times(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}) = 2(\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\,\mathrm{T} - \Omega\times(\mathrm{G}-\mathrm{O})\,.\,\mathrm{S}\,;$$

otterremo

$$\{2(\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\mathrm{U}-\mathrm{S}^2\}\,\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \{\mathrm{S}(h-\mathrm{T}) - m(\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\}\,\frac{d\mathrm{S}}{dt} + \{2(\mathrm{G}-\mathrm{O})^2\mathrm{T} - \Omega\times(\mathrm{G}-\mathrm{O})\,.\,\mathrm{S}\}\,\frac{d\mathrm{U}}{dt}\,; \tag{14}$$

che è una relazione lineare ed omogenea fra le derivate prime di T, U, S.

Il sistema delle (13), (14) e della (11), la quale ultima può scriversi

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} = (\mathrm{G}-\mathrm{O})\wedge\mathfrak{M}\times\Omega\,,$$

è precisamente il sistema stabilito dal sig. Schiff, purchè si riesca ad espri-

[1] Basta ricordare che

$$(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\times\mathbf{d})\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

mere $\mathbf{c} \times \Omega$, $(G - O) \times \Omega$ in funzione di T , U , S. E che questo sia in generale possibile, risulta dal fatto che, qualunque ipotesi si faccia sugli assi di riferimento connessi col corpo, T è una funzione quadratica ed omogenea a coefficienti costanti (momenti e prodotti d'inerzia) delle componenti di Ω secondo gli assi stessi, e le componenti di $\mathfrak{M}$ sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti di Ω. Le equazioni

$$S = (G - O) \times \mathfrak{M} \quad , \quad 2T = \Omega \times \mathfrak{M} \quad , \quad 2U = \mathfrak{M}^2 ,$$

di cui la prima è lineare, le altre due quadratiche nelle componenti di Ω, bastano allo scopo.

Dopo tale preliminare ricerca, poichè nel sistema considerato t non figura esplicitamente, possiamo ricavare dt dalla (13); allora il sistema si riduce ad uno di primo ordine rispetto a $\frac{dS}{dU}$ e $\frac{dT}{dU}$ con coefficienti algebrici; e però la determinazione di S e T mediante U dipende da una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine con coefficienti algebrici; t verrà poi determinato con una quadratura e la (12) ci darà la posizione di uno degli assi di riferimento rispetto alla verticale.

A parte dunque la non lieve complicazione dei calcoli, si può dire che *la determinazione del moto del giroscopio pesante dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti algebrici*; ed il metodo di Schiff dà, almeno teoricamente, il mezzo di formare una tale equazione.

D'altra parte la riduzione accennata è conseguenza di un noto teorema della teoria delle equazioni canoniche del moto: cioè che *se di un sistema hamiltoniano di ordine* $2n$ *si conoscono* k *integrali in involuzione, la integrazione si potrà far dipendere da quella di un sistema hamiltoniano di ordine* $2(n - k)$ *e da* k *quadrature.* Nel caso del giroscopio pesante, $n = 3$, $k = 2$; e quindi possiamo ridurci a un sistema hamiltoniano di 2° ordine, oppure ad una equazione differenziale del secondo ordine [1]. Trovata, in forma esplicita, questa equazione, il problema del moto potrebbe studiarsi allo stesso modo con cui il sig. Nekrassoff, considerando un'equazione differenziale di 2° ordine a coefficienti uniformi doppiamente periodici, ha condotto quello del caso di Hess.

3. Il coefficiente di $\frac{dT}{dt}$ nella (14) è precisamente $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2$, che è stato supposto diverso da zero. Se supponiamo parimenti diverso da zero il coefficiente di $\frac{dU}{dt}$, sarà pure $\frac{dU}{dt}$ una funzione lineare ed omogenea delle derivate

[1] Questa osservazione era stata già fatta dal prof. Cerruti nel suo corso di Meccanica Superiore del 1894-95.

$\frac{dT}{dt}$ e $\frac{dS}{dt}$. Di qui risulta subito chiaro che: *se due delle tre quantità* S, T, U *sono costanti, è costante pure la terza.*

Il caso in cui, S e T essendo costanti, è nullo il coefficiente $\frac{dU}{dt}$, va considerato a parte. Sia adunque:

$$2(G - O)^2 T - \Omega \times (G - O) \cdot S = 0,$$

cioè

$$\Omega \times (G - O) = \text{cost};$$

la (11) poi ci dà

$$\mathbf{c} \times \Omega = 0,$$

quindi Ω complanare con $\mathbf{a}$ e con $\mathbf{b}$; potremo dunque porre

$$\Omega = \alpha \mathfrak{M} + \beta (G - O),$$

e da questa, successivamente, trarremo

$$\Omega \times (G - O) = \alpha S + \beta (G - O)^2 = \text{cost}.$$
$$\Omega \times \mathfrak{M} = \alpha \mathfrak{M}^2 + \beta S = 2T = \text{cost}.,$$

dunque α, β, e quindi $\mathfrak{M}^2 = 2U$, sono costanti; la proprietà sèguita a sussistere.

È assai agevole investigare le proprietà del moto quando S, T, U siano costanti. Queste costanti non sono arbitrarie, dovendo verificare la (13) il cui primo membro è nullo.

La grandezza del vettore momento dell'impulso è costante; dunque *la prima curva d'impulso è un cerchio contenuto in un piano orizzontale, col centro sulla verticale.* La terza delle (10) ci dice inoltre che: la verticale, $\mathfrak{M}$ e G — O sono complanari; e la (5) che

$$(G - O) \times \mathbf{k} = \text{cost};$$

cioè *la curva descritta dal centro di massa è un cerchio contenuto in un piano orizzontale e col centro sulla verticale*; e la (3) mostra che tanto il primo che il secondo cerchio sono descritti dai rispettivi punti con moto uniforme; finalmente dalla (11), come precedentemente, si deduce chè Ω è complanare con $\mathfrak{M}$ e con G — O; e quindi *l'erpoloide è un cerchio analogo ai precedenti.*

Si ha invece una serie assai importante di movimenti considerando il caso che solamente U sia costante; cioè il caso in cui

$$\mathfrak{M}^2 = \text{cost}.,$$

e in cui sempre la prima curva d'impulso è un cerchio contenuto in un piano orizzontale e col centro sulla verticale, e i vettori $\mathbf{k}$, $\mathfrak{M}$ e $G - O$ sono complanari. La (13), il cui primo membro è nullo, permette di esprimere, risolvendo un'equazione di secondo grado, S mediante T e quantità note; tale espressione, come si vede subito, si fa per grandezze reali; mediante la (14) e (11) si esprimerà poscia t mediante un integrale abeliano in T. Sarebbe anche facile vedere che $h - T$ viene espresso mediante S ed U con grandezze reali.

Resta finalmente da considerare il caso, finora escluso, in cui

$$(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = 0 .$$

Dovrà essere $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = 0$; e quindi: $\mathbf{a} = G - O = 0$; siamo nel caso del moto alla Poinsot: oppure $\mathbf{b} = 0$, cioè $\mathfrak{M} = 0$ e per la (3) risulta $(G - O) \wedge \mathbf{k} = 0$, cioè $G - O = \alpha\mathbf{k}$; il centro di gravità sta sull'asse verticale condotto pel punto fisso, e l'energia cinetica è nulla: il corpo sta in riposo.

Finalmente può essere $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b}$, cioè

$$G - O = \alpha\mathfrak{M} ;$$

il vettore momento dell'impulso ha la stessa direzione del vettore $G - O$. Ma la terza delle (10) ci dà $\frac{dU}{dt} = 0$, e quindi $2U = \mathfrak{M}^2 = \text{cost}$; e però, come nel caso precedente, la prima curva d'impulso e quella del centro di massa sono cerchi contenuti in piani orizzontali e coi centri sulla verticale di O e descritti con moto uniforme: e le stesse conseguenze si traggono per l'asse istantaneo di rotazione e per la erpoloide.

4. Vogliamo da ultimo osservare che l'equazione (3), che compendia le leggi del moto, conduce a stabilire in generale alcune proprietà della prima curva d'impulso; cioè della curva piana descritta da un punto P tale che

$$P - O = \mathfrak{M} .$$

Si ha infatti successivamente

$$P' = \mathbf{k} \wedge (G - O),$$

$$P'' = \mathbf{k} \wedge G' = \mathbf{k} \wedge \{\boldsymbol{\Omega} \wedge (G - O)\} = \mathbf{k} \times (G - O) . \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{k} \times \boldsymbol{\Omega} . (G - O) ;$$

cioè: *la velocità con cui* P *descrive la prima curva d'impulso è normale al piano di* $\mathbf{k}$ *e* $G - O$ *ed è proporzionale al seno dell'angolo che* $G - O$ *forma con la verticale; l'accelerazione è complanare con* $\boldsymbol{\Omega}$ *e* $G - O$.

Dalla (1) poi risulta che mod. $\mathfrak{M}$ si manterrà sempre inferiore, al più eguale ad una quantità finita; e, se C è il punto in cui il piano della curva taglia la verticale, lo stesso avverrà per mod. $(P - C)$; dunque:

la prima curva d'impulso è tutta interna ad un cerchio di centro C *e di raggio finito ed esterna ad un cerchio analogo, il cui raggio può anche essere nullo.*

Se poi il punto P raggiunge in A uno dei cerchi, il mod. (A — C), e quindi quello di $\mathfrak{M}^2$, diventa massimo o minimo, dalla (7) si deduce che G — O, $\mathfrak{M}$ e **k** sono complanari e quindi:
la curva d'impulso tocca i due cerchi limiti.

Un'altra conseguenza semplice si può dedurre dalla (5). Considero la sfera di centro O su cui giace, durante il moto, il centro di massa G; e suppongo che le condizioni iniziali di moto diano al mod. h un valore minore del raggio della sfera suddetta. Descriviamo intorno alla verticale il cono dei raggi uscenti da O e che hanno per proiezione sulla verticale appunto il mod. h. Secondo che h è positivo o negativo tale cono sarà descritto intorno alla normale positiva o negativa. Ciò posto, dalla (5) si deduce subito che il cono descritto da G — O sarà sempre *esterno* al primo cono nel primo caso; *interno* al secondo nel secondo caso.

Se poi durante il movimento accade che tale cono è sempre compreso tra due coni rotondi intorno alla verticale, negli istanti in cui G — O giace su uno di tali coni, l'energia cinetica diventa massima (minima); i tre vettori Ω, G — O, **k** sono complanari ed *il cono descritto da* G — O *tocca i due coni limiti.*

Queste proprietà sono confermate nel caso del giroscopio simmetrico pesante in cui la curva d'impulso è una *erpoloide*; e una determinata proiezione stereografica della cnrva del vertice è quella curva che ho studiato col nome di *erpoloide generalizzata* (1).

Fisica. — *Sul comportamento singolare di un rocchetto di Ruhmkorff usato con un interruttore elettrolitico.* Nota di Lavoro Amaduzzi, presentata dal Socio A. Righi.

1. Alcuni anni or sono (2) ebbi occasione di occuparmi del comportamento di un rocchetto di Ruhmkorff e di mettere in rilievo un fatto alquanto strano, consistente sostanzialmente in ciò, che colla diminuzione graduale della resistenza ohmica o della autoinduzione esistenti nel circuito primario del rocchetto, si raggiungeva un momento di pausa nel processo di scarica per scintilla fra gli estremi del secondario. Col progredire nella diminuzione, la scarica riappariva ben manifesta e ben nutrita.

Il fatto fu da me rilevato dapprima coll'uso di una corrente continua, interrotta da un interruttore di Wehnelt, ma vidi poi come esso si rendesse ben manifesto anche alimentando il primario del rocchetto, nel quale era inserito un Wehnelt, colla corrente alternata stradale. E quelle poche osser-

(1) Annali di Mat. s. III, t. VII, pp. 99-128 (1902).

(2) Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. VIII, dicembre 1904; serie 5ª, vol. X, agosto 1905.