ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

vemente ed imperfettamente descritta non mi è possibile notare qui le reali differenze esistenti tra essa e quella da me ritenuta nuova, mentre quelle apparenti, che si possono rilevare dalle figure del Berlese sopra citate, consistono almeno nel numero e disposizione delle setole del capo e del torace, nella grandezza dell'unghia del primo paio di zampe e nella forma e numero e disposizione delle setole del tarso dello stesso paio di zampe.

Quanto al genere *Eosentomon*, esso è ben distinto dal genere *Acerentomon* oltre che per la presenza degli stigmi al meso- e al meta-torace, anche per la forma degli stili del 2° e 3° segmento addominale e per la mancanza di lamina pettinata sull'ottavo segmento addominale.

Io ritengo che la presenza di stigmi sia da considerarsi carattere di importanza maggiore che generica e perciò propongo di dividere la famiglia Acerentomidi in due tribù: *Acerentomini* e *Eosontomini*. Quest'ultima comprende il solo genere *Eosontomon* Berl., mentre l'altra comprende due generi: *Acerentomon* Silv. e *Proturentomon* nov., così fra di loro distinti:

a. Capo anteriormente prolungato in un rostro; ottavo segmento fornito nella parte supero-laterale posteriore di una lamina pettinata. . . . .
Gen. *Acerentomon* Silv.
Tipo: *A. Doderoi* Silv.

b. Capo anteriormente subrotondato; ottavo segmento sfornito di lamina pettinata . . . . Gen. *Proturentomon* nov.
Tipo: *Acerentomon minimum* Berl.

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche*. Nota di E. Levi, presentata dal Socio L. Bianchi.

È noto il teorema di Gauss secondo cui il valore *una funzione armonica* $u(xy)$, *in un certo campo finita è in ogni punto la media dei valori che essa prende sopra una circonferenza di centro quel punto* (ed interna al campo di esistenza della funzione). Questa proprietà è caratteristica per le funzioni armoniche? È facile vedere che, se esistono le derivate dei primi due ordini di $u(xy)$ e sono finite e continue, così è certamente; ma a rendere possibile l'enunciare detta proprietà, è chiaramente superfluo che la $u(xy)$ abbia derivate, onde si pone la questione di vedere in quali più limitate ipotesi si può provare che la proprietà enunciata è caratteristica per le funzioni armoniche. Noi stabiliremo nelle righe seguenti che *una funzione* $u(xy)$ *limitata ed integrabile linearmente su ogni circonferenza e superficialmente* [1]

[1] L'ipotesi che $u(xy)$ sia integrabile linearmente su ogni circonferenza è evidentemente insita nella natura della questione. Meno intrinseca appare l'ipotesi che $u(xy)$ sia superficialmente integrabile, e mi riservo di sostituirla con altra meno restrittiva nel

che in ogni punto abbia come valore la media dei valori che essa ha su una circonferenza di centro quel punto, ha necessariamente le derivate dei varî ordini, e quindi anche è armonica.

1. Sia $u(xy)$ la funzione data nel campo C: e supponiamo che sia in C $|u(xy)| < \mathrm{U}$. Indico con $\mathrm{C_R}$ il campo di C tale che ogni cerchio di centro un punto di $\mathrm{C_R}$ e raggio R sia interno a C. Sarà $\lim_{\mathrm{R}=0} \mathrm{C_R} = \mathrm{C}$. La proprietà supposta per $u(xy)$ se (xy) è in C_ρ, è espressa dall'equazione

$$u(xy) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \varrho \cos\vartheta \,,\, y + \varrho \operatorname{sen}\vartheta)\, d\vartheta\,, \tag{1}$$

ossia

$$2\pi\varrho\, u(xy) = \varrho \int_0^{2\pi} u(x + \varrho\cos\vartheta \,,\, y + \varrho \operatorname{sen}\vartheta)\, d\vartheta\,.$$

Supponiamo (xy) in $\mathrm{C_R}$ ed integriamo rispetto a ϱ tra 0 ed R: si avrà

$$\begin{aligned} u(xy) &= \frac{1}{\pi \mathrm{R}^2} \int_0^{\mathrm{R}} \varrho d\varrho \int_0^{2\pi} u(x + \varrho\cos\vartheta \,,\, y + \varrho\operatorname{sen}\vartheta)\, d\vartheta = \\ &= \frac{1}{\pi\mathrm{R}^2} \iint_{\Gamma_{\mathrm{R}}(xy)} u(x'y')\, dx'\, dy' \end{aligned} \tag{2}$$

dove $\Gamma_{\mathrm{R}}(xy)$ indica il cerchio di centro (xy) e raggio R. In altri termini $u(xy)$ è uguale alla media dei valori della $u(xy)$ in ogni cerchio di centro (xy) ([1]).

È da notare che l'integrale dell'ultima formula (2) ha realmente senso come integrale di area, grazie all'ipotesi che la $u(xy)$ sia superficialmente integrabile.

Segue dalla (2) facilmente che la funzione è continua ed ammette le derivate dai varî ordini ([2]).

---

n. 2. Ma a diminuire fin d'ora l'importanza di tale ipotesi, osserverò che le integrazioni di cui si parla in tutto il ragionamento che segue possono intendersi nel senso del Lebesgue. Supponendosi la funzione limitata, l'integrale del Lebesgue preso sulle circonferenze esiste sempre che esista l'integrale Riemanniano (non viceversa), e non differisce da esso; e può allora esistere l'integrale superficiale nel senso del Lebesgue (in modo che le deduzioni del testo conservino il loro valore) senza che esista però il corrispondente integrale di Riemann. Così avviene per es.: negli esempî dati dal Pringsheim (Münch. Ber. 1899) di funzioni integrabili linearmente sulle parallele agli assi e non integrabili superficialmente nel senso di Riemann.

([1]) È dunque questa una proprietà di cui godono le funzioni armoniche. Per via alquanto più complicata è essa stata ottenuta e notata dallo Zaremba, *Sur l'intégration de l'équation biharmonique*. Bull. de l'Acad. de Cracovie. Janvier, 1908, pag. 7.

([2]) I ragionamenti che seguono sono sostanzialmente identici a quelli usati, in condizioni più difficili e più complicate, da Beppo Levi nel § 5 della Memoria: *Sul principio di Dirichlet*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXII, 1906.

La funzione è continua all'interno di C. Infatti se (xy) ed $(x'y')$ sono due punti di C_R, la cui distanza è δ, si chiami L_1 la lunula interna a $\Gamma_R(xy)$ ed esterna a $\Gamma_R(x'y')$, L_2 la lunula interna a $\Gamma_R(x'y')$ ed esterna a $\Gamma_R(xy)$: sarà

$$u(x'y') - u(xy) = \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \int\int_{L_2} - \int\int_{L_1} \right\} u(x_1 y_1)\, dx_1\, dy_1 \; ; \tag{3}$$

quindi, poichè in C è $|u(xy)| < U$, sarà

$$|u(x'y') - u(xy)| < \frac{2U}{\pi R^2} \lambda$$

dove λ è la grandezza comune delle aree L_1 ed L_2. Ma λ tende a zero con δ: quindi la funzione $u(xy)$ è continua in ogni campo C_R. E quindi ancora è continua in tutti i punti *all'interno* di C.

La funzione $u(xy)$ *ammette le derivate prime finite all'interno di* C. Proviamo ad es. che esiste la derivata rapporto ad x. Poniamo ** in (3) $(x'y') \equiv (x + \delta, y)$: la (3) si può allora scrivere:

$$u(x+\delta, y) - u(xy) = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} \cos\vartheta\, d\vartheta \int_0^{\delta} u(x + R\cos\vartheta + \xi, y + R \operatorname{sen}\vartheta)\, d\xi.$$

Indicando con $\bar{\xi}_\vartheta$ un conveniente valore tra $0 \ldots \delta$ — dipendente da ϑ —, e ricordando che la funzione $u(xy)$ è continua, si deduce, pel teorema del valor medio,

$$\frac{u(x+\delta, y) - u(xy)}{\delta} = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\vartheta + \bar{\xi}_\vartheta, y + R\operatorname{sen}\vartheta) \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Passando al limite per $\delta = 0$, si avrà che in C_R esiste $\frac{\partial u}{\partial x}$ ed è data da

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\pi R} \int_0^{2\pi} u(x + R\cos\vartheta, y + R\operatorname{sen}\vartheta) \cos\vartheta\, d\vartheta\,. \tag{4}$$

Facendo tendere a zero R si conchiude che all'interno di C esistono le derivate prime di $u(xy)$ e sono date da (4): onde, poichè $u(xy)$ è finita e continua, sono esse pure finite e continue. Esse sono quindi anche integrabili; e si vede allora immediatamente che queste derivate sono anche espresse in C_R dalla formula

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\pi R^2} \int\int_{\Gamma_R(xy)} \frac{\partial u(x'y')}{\partial x'}\, dx'\, dy' \tag{5}$$

poichè evidentemente l'integrale ultimamente scritto è uguale a quello del secondo membro di (4).

Ragionando su (5) come su (2) si vede subito che esistono a loro volta le derivate seconde di u e sono finite e continue: in particolare si ha

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(x+R\cos\vartheta\,,\,y+R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)}{\partial x}\cos\vartheta\,d\vartheta\\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{1}{\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(x+R\cos\vartheta\,,\,y+R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)}{\partial y}\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,d\vartheta\,.
\end{aligned}
$$

Si potrebbe allora, come dissi in principio, dedurre che la funzione è armonica ricorrendo alle formule di Green: ma è più facile verificarlo direttamente, osservando che da (6) ed (1) segue

$$
\begin{aligned}
\varDelta_2 u &= \frac{2}{\pi R}\int_0^{2\pi} \frac{\partial u(x+R\cos\vartheta\,,\,y+R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)}{\partial R}\,d\vartheta =\\
&= \frac{2}{R}\,\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x+R\cos\vartheta\,,\,y+R\,\mathrm{sen}\,\vartheta)\,d\vartheta\right] =\\
&= \frac{2}{R}\,\frac{\partial u(xy)}{\partial R} = 0\,.
\end{aligned}
$$

2. Abbiamo già detto che l'ipotesi che $u(xy)$, oltrechè integrabile su ogni circonferenza, sia pure superficialmente integrabile, si può sostituire con altra meno restrittiva ([1]). Per enunciare questa condizione, si considerino due punti (xy) ed $(x'y')$ arbitrarii del campo C e si chiami δ la loro distanza: si dicano ϱ e ϱ' le coordinate bipolari, rispetto ai punti (xy) ed $(x'y')$ come centri, di un punto arbitrario. Ad una coppia di valori $\varrho\,,\varrho'$ corrispondono due punti, l'uno in uno, l'altro nell'altro dei semipiani limitati dalla congiungente (xy) con $(x'y')$; e la funzione u darà luogo in questi due semipiani a due funzioni $u_1(\varrho,\varrho')$, $u_2(\varrho,\varrho')$, le quali per l'ipotesi che noi manteniamo dell'integrabilità di u su ogni cerchio, saranno integrabili sui cerchî $\varrho=\mathrm{cost}$ e $\varrho'=\mathrm{cost}$. Noi supporremo di più che, preso un campo τ limitato da uno o due cerchî, esistano e siano uguali i due integrali

$$
\int d\varrho\int[u_1(\varrho\,,\varrho')+u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\varDelta}\,d\varrho' \qquad \int d\varrho'\int[u_1(\varrho\,,\varrho')+u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\varDelta}\,d\varrho
$$

dove $\varDelta=[\delta^2-(\varrho'-\varrho)^2][\delta^2-(\varrho'+\varrho)^2]$ e le integrazioni sono estese a valori di ϱ e ϱ' che dànno punti interni a τ. È noto che questa ipotesi è meno restrittiva di quella dell'integrabilità superficiale in τ ([2]).

([1]) Questa semplificazione nelle ipotesi mi fu indicata da mio fratello Beppo.

([2]) Condizioni sufficienti affinchè si abbia

$$
\int d\xi\int f(\xi\eta)\,d\eta = \int d\eta\int f(\xi\eta)\,d\xi
$$

furono date dall'Arzelà nella Memoria: *Sugli integrali doppî* (Memorie dell'Accademia

Procederemo in modo analogo a quello tenuto al n. 1. Nelle coordinate ϱ e ϱ' l'elemento lineare del piano è

$$ds^2 = 4\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta^2}\,[\varrho\varrho'(d\varrho^2 + d\varrho'^2) - (\varrho'^2 + \varrho^2 - \delta^2)\,d\varrho\,d\varrho'] \tag{7}$$

e se si suppone (xy) in $C_{\rho'}$, $(x'y')$ in C_ρ, la (1) ci darà:

$$u(xy) = \frac{2}{\pi}\int_{|\rho-\delta|}^{\rho+\delta} \frac{[u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\varrho'\,d\varrho'}{\Delta}\,,$$

$$u(x'y') = \frac{2}{\pi}\int_{|\rho'-\delta|}^{|\rho'+\delta|} \frac{[u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\varrho\,d\varrho}{\Delta}\,.$$

Di qui moltiplicando per ϱ la prima, per ϱ' la seconda e, supposti (xy) ed $(x'y')$ in C_R, integrando rapporto a ϱ e ϱ' rispettivamente si avrà

$$(8)\quad \begin{aligned} u(xy) &= \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R d\varrho \int_{|\rho-\delta|}^{\rho+\delta} [u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho' \\ u(x'y') &= \frac{4}{\pi R^2}\int_0^R d\varrho' \int_{|\rho'-\delta|}^{\rho'+\delta} [u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho\,. \end{aligned}$$

Invertiamo nella prima di queste formule l'ordine delle integrazioni, il che per ipotesi è possibile: se si suppone $2\delta < R$, si avrà

$$u(xy) = \frac{4}{\pi R^2}\Bigg[\int_0^{R-\delta} d\varrho' \int_{|\rho'-\delta|}^{\rho'+\delta} [u_1(\varrho\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho + \\ + \int_{R-\delta}^{R+\delta} d\varrho' \int_{\rho'-\delta}^{R} [u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\,,\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho\Bigg]$$

Confrontando colla seconda delle (8), si deduce

$$u(xy) - u(x'y') = \frac{4}{\pi R^2}\Bigg[\int_R^{R+\delta} d\varrho' \int_{\rho'-\delta}^{R} [u_1(\varrho\varrho') + u_2(\varrho\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho - \\ - \int_{R-\delta}^{R} d\varrho' \int_{R}^{\rho'+\delta} [u_1(\varrho\,,\varrho') + u_2(\varrho\varrho')]\,\frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho\Bigg]. \tag{9}$$

Osserviamo ora che per (7) la lunghezza $\pi\varrho'$ del semicerchio di raggio ϱ' e centro xy è data se $\varrho' > \delta$ da

$$2\int_{|\rho'-\delta|}^{\rho'+\delta} \frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\,d\varrho\,;$$

delle Scienze di Bologna Serie V, vol. II, 1891, pag. 143) il quale notò che esse non bastavano a dedurre l'integrabilità superficiale. Sopra abbiamo già richiamato che un esempio di funzione non integrabile superficialmente e per cui tale uguaglianza è soddisfatta è stato dato dal Pringsheim (Münch. Ber. 1899). Nelle citate ricerche si tratta sempre di integrali di Riemann: per gli integrali di Lebesgue la questione non è stata ancora studiata.

e che quindi si ha:

$$\text{per } R \leq \varrho' < \varrho' + \delta \qquad 2\int_{\varrho'-\delta}^{R} \frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\, d\varrho \leq \pi\varrho' ;$$

$$\text{per } R \geq \varrho' > \varrho' \quad \delta, \qquad 2\int_{R}^{\varrho'+\delta} \frac{\varrho\varrho'}{\Delta}\, d\varrho \leq \pi\varrho'$$

Seguirà allora da (9) ricordando che $|u| < U$ in tutto C

$$(10) \qquad |u(xy) - u(x'y')| < 8\delta\,\frac{R+\delta}{R^2}\,U < 12\delta\,\frac{U}{R}.$$

E questa ci dimostra che $u(xy)$ è, nelle fatte ipotesi, continua e quindi superficialmente integrabile, onde ad essa si può applicare il ragionamento del n. 1.

Fisica. — *Ricerche ed esperimenti di telefonia elettrica senza filo.* Nota di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio BLASERNA.

In una Nota preliminare, pubblicata nel Rendiconto della Seduta di questa Accademia del 17 luglio 1904, esponevo il risultato di alcune mie ricerche sulla Telefonia senza filo. Dopo aver detto dei differenti modi con cui, mercè il sussidio dei mezzi che il prof. Blaserna poneva allora a mia disposizione, ero riuscito ad ottenere l'irradiazione da parte di un'antenna di onde *quasi continue*, descrissi sommariamente alcune disposizioni capaci di produrre la *modulazione* dell'intensità di tali onde, in corrispondenza delle vibrazioni acustiche prodotte dalla parola articolata. Nel tempo trascorso da allora sino ad oggi ho perfezionato le disposizioni accennate, e mediante esse ho potuto eseguire esperienze di telefonia senza filo a grande distanza, dalle quali si può desumere il grado di praticità che le disposizioni definitive da me sperimentate hanno raggiunto. Di tali disposizioni e di quelle esperienze dirò brevemente in questa Nota.

Apparecchio trasmittente. — È costituito da un generatore di onde *quasi continue*, oppure da un generatore Poulsen. Il primo di tali generatori è quello descritto alla lettera *e* a pag. 89 della Nota citata, e di esso mi sono servito a più riprese, specie nelle prime ricerche. Dopo la scoperta fatta dal Poulsen delle notevoli qualità oscillatorie di un arco voltaico in atmosfera di idrogeno, mi sono servito con successo di questo mezzo per generare onde continue; ma in certi casi l'uso delle scintille staccate presenta, sotto alcuni riguardi, vantaggi di fronte all'arco Poulsen. Prescindendo adunque dalla natura dell'apparecchio generatore delle onde, dirò di tutte le rimanenti parti del mio sistema; in ogni caso, salvo piccole differenze costrut-