ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Sopra un caso limite delle trasformazioni delle superficie applicabili sulle quadriche.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Nella teoria delle trasformazioni B_k per le superficie applicabili sulle quadriche generali, da me recentemente costruita [1], si presenta un caso limite notevole quando la quadrica fondamentale rigata Q, variando nel sistema confocale, diventa una delle quadriche singolari della schiera, degenerando come inviluppo in una delle coniche focali, le cui tangenti vengono allora a rappresentare i due sistemi (coincidenti) di generatrici. Si ottiene così, come caso limite, una teoria delle trasformazioni per una classe particolare di curve che possono dirsi *coniche distorte*, come quelle curve che si ottengono dalle coniche ordinarie assoggettandole ad una torsione arbitraria senza alterare, in ciascun punto, il valore della flessione. In particolare se la conica fondamentale è un circolo, le curve deformate sono le curve a flessione costante o i *circoli storti* (Cesàro).

Per maggiore chiarezza degli enunciati, dei teoremi e delle formole che andiamo ora ad esporre, premettiamo le osservazioni seguenti. Quando una sviluppabile si deforma conservando rettilinee le sue generatrici, il suo spigolo di regresso si deforma conservando in ogni punto invariata la flessione e cangiando la torsione. Viceversa se due curve Γ, Γ' si corrispondono punto per punto, per eguaglianza d'archi ed avendo in punti corrispondenti eguale flessione, le sviluppabili delle loro tangenti sono applicabili corrispondendosi le generatrici. Diremo perciò che le due curve Γ, Γ' sono *applicabili*, ovvero che l'una è una deformata dell'altra. Teniamo fissa una delle due curve, p. e. Γ', e assoggettiamo l'altra ad un movimento continuo nello spazio per modo che ogni suo punto si porti successivamente a coincidere col corrispondente di Γ', ed insieme il piano osculatore di Γ nel punto di contatto venga a coincidere col piano osculatore di Γ'; diremo allora che Γ *rotola* sopra Γ'.

Ciò premesso, prendiamo una conica fondamentale C ed una qualunque conica distorta Γ, applicabile sopra C. Consideriamo inoltre una quadrica rigata Q, di cui C sia una conica focale, ed immaginiamo che la conica C rotoli sulla deformata Γ seco trascinando la quadrica Q. Abbiamo allora il seguente teorema fondamentale:

Le rette (dell'uno o dell'altro sistema) della quadrica Q, *trascinata*

[1] Vedi la mia Nota del 5 marzo 1907 in questi Rendiconti, ove vengono enunciati i principali teoremi di questa teoria, ora sviluppata nella mia ultima pubblicazione: *Mémoire sur la théorie des transformations des surfaces applicables sur les quadriques générales* (Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences, t. XXXIV).

nel rotolamento della conica focale C *sulla sua deformata* Γ, *generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso altrettante coniche distorte* Γ' *applicabili sulla conica* C.

A complemento di questo enunciato aggiungiamo quanto segue. Si consideri la conica C′, confocale a C, sezione del piano di C colla quadrica Q. Mentre C rotola su Γ, la conica C′ descrive una superficie modanata (moulure), che indicheremo con Σ, inviluppata lungo le coniche C′, dalle varie posizioni della quadrica Q. Su questa superficie Σ abbiamo un doppio sistema di curve Γ' che seguono, in ogni loro punto, la direzione di quella generatrice di Q che vi passa. Queste curve Γ' sono appunto le indicate trasformate della conica distorta iniziale Γ.

2. Le formole relative alle trasformazioni delle coniche distorte difficilmente potrebbero dedursi da quelle generali per le trasformazioni delle deformate delle quadriche e d'altronde la natura più elementare dell'attuale teoria, che appartiene alla teoria delle curve, domanda un'analisi diretta, che qui rapidamente indichiamo.

Considerando una deformata qualunque Γ della conica fondamentale C, riteniamo per questa curva Γ le consuete notazioni (Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, cap. I) e indichiamo con u un parametro che fissa la posizione di un punto mobile su Γ. Similmente sulla conica C′, confocale a C, prendiamo un secondo parametro v per individuare la posizione di un punto mobile su C′. Quando la conica C, rotolando sopra Γ, viene con essa a contatto in un punto $P = (x, y, z)$, corrispondente al valore u del parametro, le coordinate x', y', z' di un punto qualunque di C′, corrispondente al valore v del rispettivo parametro, saranno funzioni di u, v della forma:

$$(1) \qquad x' = x + l\alpha + m\xi \ , \ y' = y + l\beta + m\eta \ , \ z' = z + l\gamma + m\zeta \, .$$

Qui l, m indicano due funzioni di u, v, che restano sempre le stesse comunque la curva Γ si deformi, e per calcolarne i valori basta dare a Γ la forma stessa della conica C. Queste formole (1) dànno la superficie modanata Σ luogo della conica C′.

Per una posizione qualunque di C′ consideriamo la quadrica Q che tocca Σ lungo C′ e indichiamo con X, Y, Z i coseni di direzione della generatrice considerata di Q uscente dal punto (u, v) di Σ. Avremo:

$$(2) \qquad X = L\alpha + M\xi + P\lambda \ , \ Y = L\beta + M\eta + P\mu \ , \ Z = L\gamma + M\zeta + P\nu \, ,$$

dove le funzioni L, M, P di u, v sono, come le l, m nelle (1), indipendenti dalla forma di Γ.

Si ottengono le equazioni differenziali per le curve trasformate Γ' sopra Σ esprimendo che in ogni loro punto la tangente ha i coseni di direzione X , Y , Z .

3. Sia dapprima C una parabola, che immaginiamo nel piano xz e di cui scriviamo l'equazione

$$x^2 = 2pz \qquad (p > 0). \tag{3}$$

L'equazione di un qualunque paraboloide iperbolico Q, avente C per parabola focale, sarà

$$\frac{x^2}{p-k} - \frac{y^2}{k} = 2z - k \tag{4}$$

$$0 < k < p.$$

Assumiamo a parametro u quello definito dalle formole

$$x = \sqrt{p}\,u \quad y = 0 \quad z = \frac{u^2}{2}. \tag{5}$$

Sulla parabola confocale C'

$$\frac{x'^2}{p-k} = 2z' - k,$$

prendiamo similmente il parametro v secondo le formole

$$x' = \sqrt{p-k}\,v\ ,\ y' = 0\ ,\ z' = \frac{v^2 + k}{2}.$$

Il raggio ϱ di 1ª curvatura di Γ (o di C) è dato da

$$\varrho = \frac{(u^2+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}, \tag{6}$$

e definiremo intrinsecamente la curva Γ dando altresì il suo raggio T di torsione in funzione di u:

$$\mathrm{T} = \varphi(u).$$

Pei valori delle funzioni l, m ; L , M , P nelle formole (1), (2) si trovano i seguenti:

$$\left\{\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{p}\,(v\sqrt{p-k} - u\sqrt{p}) + \frac{u}{2}(v^2 - u^2 + k)}{\sqrt{u^2+p}} \\ m &= \frac{\frac{\sqrt{p}}{2}(u^2 + v^2 + k) - uv\sqrt{p-k}}{\sqrt{u^2+p}} \end{aligned}\right. \tag{7}$$

$$\mathrm{L} = \frac{uv + \sqrt{p(p-k)}}{\sqrt{u^2+p}\,\sqrt{v^2+p}}\ ,\ \mathrm{M} = \frac{v\sqrt{p} - u\sqrt{p-k}}{\sqrt{u^2+p}\,\sqrt{v^2+p}}\ ,\ \mathrm{P} = -\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{v^2+p}}. \tag{8}$$

Per l'equazione differenziale delle curve trasformate Γ' si ha

$$\frac{dv}{du}=\frac{\sqrt{p}\,(u^2+v^2+k)+2uv\sqrt{p-k}}{2\mathrm{T}\sqrt{k}}\,; \tag{9}$$

essa è, come si vede, un'equazione del tipo di Riccati per la funzione incognita v di u. I raggi di prima e seconda curvatura di Γ' si trovano dati dalle formole

$$\left\{\begin{aligned} \varrho' &= \frac{(v^2+p)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} \\ \mathrm{T}' &= \frac{\left[\frac{\sqrt{p}}{2}(u^2+v^2+k)-uv\sqrt{p-k}\right]^2}{k\mathrm{T}}\,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

La prima di queste dimostra che la curva Γ' è una parabola distorta applicabile sopra Γ.

4. La conica fondamentale C sia la ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (a \geq b)$$

e l'ellisse confocale C'

$$\frac{x'^2}{a^2-k}+\frac{y'^2}{b^2-k}=1$$
$$0<k<b^2,$$

e per quadrica Q prendiamo l'iperboloide ad una falda

$$\frac{x'^2}{a^2-k}+\frac{y'^2}{b^2-k}-\frac{z'^2}{k}=1\,,$$

avente C' per ellisse di gola, C per ellisse focale.

Introduciamo qui i parametri u, v (angoli eccentrici) colle formole

$$\left\{\begin{aligned} x &= \cos u & y &= b \operatorname{sen} u \\ x' &= \sqrt{a^2-k}\cos v\,, & y' &= \sqrt{b^2-k}\operatorname{sen} v\,; \end{aligned}\right.$$

troviamo allora

$$\left\{\begin{aligned} l &= \frac{(a^2-b^2)\operatorname{sen} u\cos u - a\sqrt{a^2-k}\operatorname{sen} u\cos v + b\sqrt{b^2-k}\cos u\operatorname{sen} v}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u+b^2\cos^2 u}} \\ m &= \frac{ab - a\sqrt{b^2-k}\operatorname{sen} u\operatorname{sen} v - b\sqrt{a^2-k}\cos u\cos v}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2 u+b^2\cos^2 u}} \end{aligned}\right. \tag{11}$$

$$
(12)\quad \begin{cases}
\mathrm{L} = \dfrac{a\sqrt{a^2-k}\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v + b\sqrt{b^2-k}\cos u\cos v}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u}\,\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 v + b^2\cos^2 v}} \\[2ex]
\mathrm{M} = \dfrac{b\sqrt{a^2-k}\cos u\,\mathrm{sen}\,v - a\sqrt{b^2-k}\,\mathrm{sen}\,u\cos v}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 u + b^2\cos^2 u}\,\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 v + b^2\cos^3 v}} \\[2ex]
\mathrm{P} = -\dfrac{\sqrt{k}}{\sqrt{a^2\,\mathrm{sen}^2 v + b^2\cos^2 v}}.
\end{cases}
$$

Per l'equazione differenziale delle ellissi distorte trasformate Γ' si trova

$$
(13)\quad \frac{dv}{du} = \frac{ab - a\sqrt{b^2-k}\,\mathrm{sen}\,u\,\mathrm{sen}\,v - b\sqrt{a^2-k}\cos u\cos v}{\mathrm{T}\sqrt{k}},
$$

e questa, assumendo come funzione incognita $\mathrm{tg}\,\frac{v}{2}$, ha ancora la forma di Riccati.

5. La conica fondamentale $\overline{\mathrm{C}}$ sia un'iperbola di cui scriviamo l'equazione

$$
\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2} - \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2} = 1,
$$

e consideriamo l'iperboloide rigato Q avente $\overline{\mathrm{C}}$ per iperbola focale

$$
\frac{\overline{x}^2}{\overline{a}^2+\overline{k}} - \frac{\overline{y}^2}{\overline{b}^2-\overline{k}} + \frac{\overline{z}^2}{\overline{k}} = 1
$$

$$
0 < \overline{k} < \overline{b}^2,
$$

e per iperbola principale $\overline{\mathrm{C}}'$

$$
\frac{\overline{x}'^2}{\overline{a}^2+\overline{k}} - \frac{\overline{y}'^2}{\overline{b}^2-\overline{k}} = 1.
$$

Introduciamo i parametri $\overline{u}$ $\overline{v}$ sulle iperbole confocali $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{C}}'$ colle formole

$$
\begin{cases}
\overline{x} = \overline{a}\cosh u & \overline{y} = \overline{b}\,\mathrm{senh}\,\overline{u} \\
\overline{x}' = \sqrt{\overline{a}^2+\overline{k}}\cosh v\ , & \overline{y}^2 = \sqrt{\overline{b}^2-\overline{k}}\ \mathrm{senh}\,v\,.
\end{cases}
$$

Troviamo allora

$$
(14)\quad \begin{cases}
\overline{l} = \dfrac{\overline{a}\sqrt{\overline{a}^2+\overline{k}}\,\mathrm{senh}\,\overline{u}\cosh\overline{v} + \overline{b}\sqrt{\overline{b}^2-\overline{k}}\cosh\overline{u}\,\mathrm{senh}\,\overline{v} - (\overline{a}^2+\overline{b}^2)\,\mathrm{senh}\,\overline{u}\cosh\overline{u}}{\sqrt{\overline{a}^2\,\mathrm{senh}^2\overline{u} + \overline{b}^2\cosh^2\overline{u}}} \\[2ex]
\overline{m} = \dfrac{\overline{b}\sqrt{\overline{a}^2+\overline{k}}\cosh\overline{u}\cosh\overline{v} - \overline{a}\sqrt{\overline{b}^2-\overline{k}}\,\mathrm{senh}\,\overline{u}\,\mathrm{senh}\,\overline{v} - \overline{a}\,\overline{b}}{\sqrt{\overline{a}^2\,\mathrm{senh}^2\overline{u} + \overline{b}^2\cosh^2\overline{u}}}
\end{cases}
$$

$$
(15)\qquad \begin{cases}
\overline{\mathrm{L}} = \dfrac{a\sqrt{\bar{a}^2+\bar{k}}\,\mathrm{senh}\,\bar{u}\,\mathrm{senh}\,\bar{v} + \bar{b}\sqrt{\bar{b}^2-\bar{k}}\,\cosh\bar{u}\cosh\bar{v}}{\sqrt{\bar{a}^2\,\mathrm{senh}^2\bar{u}+\bar{b}^2\cosh^2\bar{u}}\cdot\sqrt{\bar{a}^2\,\mathrm{senh}^2\bar{v}+\bar{b}^2\cosh^2\bar{v}}} \\[2ex]
\overline{\mathrm{M}} = \dfrac{\bar{b}\sqrt{\bar{a}^2+\bar{k}}\,\cosh\bar{u}\,\mathrm{senh}\,\bar{v} - \bar{a}\sqrt{\bar{b}^2+\bar{k}}\,\mathrm{senh}\,\bar{u}\cosh\bar{v}}{\sqrt{\bar{a}^2\,\mathrm{senh}^2\bar{u}+\bar{b}^2\cosh^2\bar{u}}\cdot\sqrt{\bar{a}^2\,\mathrm{senh}^2\bar{v}+\bar{b}^2\cosh^2\bar{v}}} \\[2ex]
\overline{\mathrm{P}} = -\dfrac{\sqrt{\bar{k}}}{\sqrt{\bar{a}^2\,\mathrm{senh}^2\bar{v}+\bar{b}^2\cosh^2\bar{v}}}\,.
\end{cases}
$$

L'equazione differenziale delle iperbole distorte trasformate $\overline{\Gamma}'$ è data da

$$
(16)\qquad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \frac{\bar{b}\sqrt{\bar{a}^2+\bar{k}}\,\cosh\bar{u}\cosh\bar{v} - \bar{a}\sqrt{\bar{b}^2-\bar{k}}\,\mathrm{senh}\,\bar{u}\,\mathrm{senh}\,\bar{v} - \bar{a}\bar{b}}{\mathrm{T}\sqrt{\bar{k}}}\,,
$$

e nell'incognita $\mathrm{tgh}\,\dfrac{\bar{v}}{2}$ ha la forma di Riccati.

6. Paragonando le formole dei due numeri precedenti si ottengono relazioni notevoli fra le deformazioni di una ellisse e di un'iperbola, focale l'una dell'altra, che corrispondono perfettamente alle proprietà delle quadriche *coniugate in deformazione*.

Della ellisse

$$
\mathrm{C)}\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1
$$

si consideri l'iperbola focale di semiassi

$$
\bar{a}=\sqrt{a^2-b^2}\,,\quad \bar{b}=b\,,
$$

e collocando l'iperbola nel piano stesso della ellisse, se ne scriva l'equazione sotto la forma

$$
\overline{\mathrm{C}})\qquad \frac{\bar{x}^2}{\bar{a}^2}-\frac{\bar{y}^2}{\bar{b}^2}=1\,.
$$

Colla omografia Ω data dalle formole

$$
(\Omega)\qquad x=\frac{a\bar{a}}{\bar{x}}\,,\quad y=\bar{a}\,\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\,,
$$

l'ellisse C′ si cangia nell'iperbola $\overline{\mathrm{C}}$ e la schiera di quadriche omofocali determinata da C nella analoga di $\overline{C}$. Prendiamo le rispettive coniche confocali

$$\text{C}')\qquad \frac{x'^2}{a^2-k}+\frac{y'^2}{b^2-k}=1$$

$$\overline{\text{C}}')\qquad \frac{\overline{x}'^2}{\overline{a}^2-\overline{k}}-\frac{\overline{y}'^2}{\overline{b}^2-\overline{k}}=1$$

ove

$$\overline{k}=\frac{k\overline{a}^2}{a^2-k};$$

l'omografia Ω cangia appunto C' in $\overline{C}'$.

Per i parametri $(u,\overline{u})$, $(v,\overline{v})$ l'omografia Ω si traduce nelle relazioni

$$\begin{cases} \cosh\overline{u}=\dfrac{1}{\cos u}\ , & \operatorname{senh}\overline{u}=\operatorname{tg} u \\ \cosh\overline{u}=\dfrac{1}{\cos v}\ , & \operatorname{senh}\overline{v}=\operatorname{tg} v\,, \end{cases}$$

onde segue

$$\frac{d\overline{v}}{d\overline{u}}=\frac{\cos u}{\cos v}\frac{dv}{du}.$$

Le due equazioni differenziali corrispondenti (13), (16) si portano a coincidere se si pone

$$\frac{1}{\overline{T}}=\frac{\cos^2 u}{T}.$$

Per tal modo ad ogni ellisse distorta Γ applicabile sulla ellisse C si fa corrispondere una determinata iperbola distorta $\overline{\Gamma}$ applicabile sull'iperbola focale $\overline{C}$, e le trasformazioni di $\overline{\Gamma}$ si ottengono da quelle di Γ semplicemente per mezzo della omografia Ω.

7. Fra le trasformazioni delle coniche distorte Γ è notevole la trasformazione *singolare* che si ottiene quando la conica confocale C' degenera nell'asse focale ricoperto due volte, e la quadrica Q diventa quindi la sviluppabile delle tangenti alla conica focale di C. Questa trasformazione singolare corrisponde al valore $k=p$ del parametro nel caso parabolico ed al valore $k=b^2$ nel caso ellittico ed iperbolico.

Enunciando le proprietà geometriche relative al caso della trasformazione singolare, abbiamo: *Se una conica* C *rotola sopra una conica distorta* Γ *applicabile, seco trascinando la conica focale* $\overline{C}$, *le tangenti di questa generano una congruenza le cui sviluppabili di un sistema hanno per spigoli di regresso le successive posizioni di* $\overline{C}$, *e gli spigoli di regresso* Γ' *delle sviluppabili dell'altro sistema sono altrettante coniche distorte applicabili, come* Γ, *sopra* C.