ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Analisi. — *Sulla media dei valori che una funzione dei punti dello spazio assume alla superficie di una sfera.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

1. Sia $V(x, y, z)$ una funzione finita, a un sol valore, in tutti i punti dello spazio limitato da una sfera di centro O e raggio R, la quale ammetta, entro questo stesso spazio, le derivate parziali finite ed integrabili fino alle $(2n)^{me}$ incluse. Si indichi con Δ_{2n} il risultato della operazione

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ripetuta n volte. Vogliamo dimostrare che: *la media dei valori che la V assume sulla sfera si può esprimere colla formola*

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} M = V_0 + \frac{R^2}{3!}(\Delta_2 V)_0 + \frac{R^4}{5!}(\Delta_4 V)_0 + \cdots + \\ + \frac{R^{2n-2}}{(2n-1)!}(\Delta_{2n-2}V)_0 + \frac{R^{2n}}{(2n+1)!}(\Delta_{2n}V)_m ,\end{aligned}$$

dove l'indice 0 si riferisce al centro O della sfera, e con $(\Delta_{2n}V)_m$ si intende un valore compreso fra il massimo e il minimo di quelli che $\Delta_{2n}V$ assume nello spazio sferico considerato.

2. Per comodità di dimostrazione assumiamo la notazione seguente. Indichiamo con $I_1 . \varphi(R)$ il risultato della operazione

$$\text{(1)}\qquad \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right)\varphi(r) \,.\, dr$$

eseguita sulla funzione $\varphi(r)$ (supposta integrabile); con $I_2 . \varphi(R)$ il risultato della stessa operazione eseguita sulla $I_1 . \varphi(r)$; ossia

$$I_2 . \varphi(R) = \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) I_1 . \varphi(r) \,.\, dr ;$$

e generalmente con $I_n . \varphi(R)$ il risultato della operazione (1) ripetuta n volte.

Se la φ si riduce ad una costante c, si verifica facilmente che:

$$\text{(2)}\qquad I_1 . c = \frac{R^2}{3!}c ,\; I_2 . c = \frac{R^4}{5!}c ,\; \ldots ,\; I_n . c = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!}c .$$

E poichè, nell'intervallo d'integrazione, $r - \frac{r^2}{R}$ non è mai negativo, si avrà pure

$$I_n \cdot \varphi(R) = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!} \varphi_m \tag{3}$$

dove φ_m è un valore della $\varphi(r)$ nell'intervallo $(0, R)$.

Ciò posto, applichiamo alla V, nello spazio sferico considerato, la formola di Stokes

$$4\pi V_0 = \int_S \left(V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} \right) dS - \int_\tau \frac{\varDelta_2 V}{r} d\tau, \tag{4}$$

indicando con dS un elemento superficiale della sfera, con $d\tau$ un elemento di volume in essa incluso, con n la normale interna. Intendendo che V_0 si riferisca al centro della sfera, la (4) diverrà

$$V_0 = \frac{1}{4\pi R^2} \int_S V dS - \frac{1}{4\pi R} \int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS - \frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\varDelta_2 V}{r} d\tau,$$

od anche, chiamando M come si è detto sopra, il valor medio della V alla superficie della sfera ed osservando che

$$\int_S \frac{\partial V}{\partial n} dS = - \int_\tau \varDelta_2 V \, . \, d\tau,$$

$$M = V_0 + \frac{1}{4\pi} \int_\tau \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \varDelta_2 V \, . \, d\tau.$$

Indicando con $d\Omega$ un elemento angolare di spazio ed osservando che $d\tau$ può esprimersi con $r^2 \, . \, dr \, . \, d\Omega$, questa formola diventa

$$M = V_0 + \frac{1}{4\pi} \int_0^R dr \left(r - \frac{r^2}{R} \right) \int_{4\pi} \varDelta_2 V \, . \, d\Omega.$$

Il rapporto $\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} \varDelta_2 V \, . \, d\Omega$ esprime, in questa formola, il valor medio del $\varDelta_2$ sulla sfera di raggio r. Indicandolo con $M_2(r)$ e tenuta la precedente notazione, potremo scrivere

$$M = V_0 + I_1 \, . \, M_2(R). \tag{5}$$

Applichiamo questa formola alla funzione $\varDelta_2 V$ e indichiamo con $M_4(r)$ la media dei valori del $\varDelta_4 V$ alla superficie della sfera di raggio r. Avremo

$$M_2(R) = (\varDelta_2 V)_0 + I_1 \, . \, M_4(R),$$

e sostituendo in (5) tenuto conto delle (2):

$$M = V_0 + \frac{R^2}{3!}(\Delta_2 V)_0 + I_2 \,.\, M_4(R) \,. \tag{6}$$

E proseguendo

$$\begin{aligned} M = V_0 + \frac{R^2}{3!}(\Delta_2 V)_0 + \frac{R^4}{5!}(\Delta_4 V)_0 + \cdots + \\ + \frac{R^{2n-2}}{(2n-1)!}(\Delta_{2n-2} V)_0 + I_n \,.\, M_{2n}(R) \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Infatti, in forza della (6), la (7) è vera per $n = 2$. Se poi osserviamo che, per la (5)

$$M_{2n}(R) = (\Delta_{2n} V)_0 + I_1 \,.\, M_{2n+2}(R),$$

sarà, tenuto conto delle (2)

$$I_n \,.\, M_{2n}(R) = \frac{R^{2n}}{(2n+1)!}(\Delta_{2n} V)_0 + I_{n+1} \,.\, M_{2n+2}(R) \,,$$

con che la (7), supposta verificata per un certo valore di n, resta pure soddisfatta cangiandovi n in $n + 1$.

La (3) poi applicata all'ultimo termine della (7) conduce subito alla formola (1) che si voleva dimostrare, giacchè un valore scelto fra quelli che $M_{2n}(r)$ assume sulle sfere di centro O e di raggio r compreso fra 0 ed R, deve necessariamente esser compreso fra il massimo e il minimo di $\Delta_{2n} V$ entro lo spazio sferico considerato.

3. Nel caso in cui uno dei Δ_{2n} si annulli in ogni punto, il numero dei termini nel 2° membro della (A) risulta limitato, e la formola stessa comprende, come caso particolare, il noto teorema di Gauss sul valor medio di una funzione armonica alla superficie di una sfera.

Se nessuno dei Δ_{2n} si annulla identicamente, la (A) prolungata indefinitamente dà luogo ad una serie la quale sarà certamente convergente se le derivate di un ordine qualunque si mantengono inferiori a un limite finito L. Infatti in tal caso

$$|\Delta_{2n} V| < 3^n \,.\, L \,.$$

Per dedurre dalla (A) come caso particolare lo sviluppo di Maclaurin, basta supporre V funzione della sola distanza r da 0, e propriamente porre

$$V = \varphi(t) \,, \qquad t = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \,.$$

Si ha allora, come non è difficile verificare:

$$(\Delta_{2n} V)_{t=0} = 2^n \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)\,(2n+1)\,\varphi^{(n)}(0) \,,$$

sicchè il termine generico della (A) diventa

$$\frac{R^{2n}}{(2n+1)!}(\Delta_{2n}V)_0 = \frac{2^n \cdot R^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}\varphi^{(n)}(0) = \frac{t^n}{n!}\varphi^{(n)}(0).$$

4. Dalla (A) si deduce

$$(\Delta_2 V)_0 = \lim_{R=0} \frac{6(M - V_0)}{R^2}. \tag{8}$$

Se si assume questa formola come definizione del $\Delta_2 V$, riesce assai facile dimostrare l'equazione di Poisson

$$\Delta_2 V = -4\pi k$$

per la funzione potenziale di una massa distribuita nello spazio con densità generica k.

Infatti, si consideri una sfera di raggio R e un punto P a distanza r dal centro. Il notissimo teorema sulla attrazione degli strati sferici omogenei può enunciarsi sotto forma puramente geometrica dicendo che: *la media delle inverse distanze di* P *dai punti della sfera è* $\frac{1}{r}$ *ovvero* $\frac{1}{R}$, *a seconda che* P *è esterno o interno alla sfera.* Quindi la funzione potenziale di una particella materiale m posta a distanza r dal centro avrà, pei punti della sfera, il valor medio superficiale $\frac{m}{r}$ se la particella è *esterna*, $\frac{m}{R}$ se è *interna* alla sfera. Segue da ciò che se una massa attraente è distribuita dentro e fuori la sfera e ne chiamiamo V la funzione potenziale per un punto qualunque, la differenza fra il valor medio M della V alla superficie della sfera, e il valore V_0 al centro, dipenderà unicamente dalla massa interna alla sfera e sarà

$$V_0 - M = \int_\tau \frac{k \cdot d\tau}{r} - \frac{1}{R}\int_\tau k \cdot d\tau = \int_\tau k\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) d\tau =$$
$$= \int_{4\pi} d\Omega \int_0^R \left(r - \frac{r^2}{R}\right) k \cdot dr.$$

Se la densità della massa, nell'interno della sfera, è compresa fra k_1 e k_2, l'ultimo membro è compreso fra

$$4\pi \frac{R^2}{6} k_1 \quad \text{e} \quad 4\pi \frac{R^2}{6} k_2 ;$$

quindi

$$4\pi k_1 < \frac{6(V_0 - M)}{R^2} < 4\pi k_2 .$$

Se nel punto P considerato non vi ha variazione discontinua della densità, la (8) dà pertanto immediatamente la equazione di Poisson.