ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 marzo 1909.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Fisica matematica. — *Sulle equazioni della elettrodinamica.* Nota del Socio VITO VOLTERRA.

ART. I. — *La isteresi.*

1. Hertz ha stabilito come equazioni fondamentali della elettrodinamica dei sistemi in quiete, le seguenti [1]:

$$
(\mathrm{I})\ \left\{\begin{aligned}
A\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\\
A\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\\
A\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial X}{\partial y}
\end{aligned}\right.
\qquad
(\mathrm{I}')\ \left\{\begin{aligned}
A\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y}-4\pi A u\\
A\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z}-4\pi A v\\
A\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}-4\pi A w
\end{aligned}\right.
$$

in cui

$$
(\mathrm{II})\ \left\{\begin{aligned}
X &= \varepsilon_{11}X+\varepsilon_{12}Y+\varepsilon_{13}Z\\
Y &= \varepsilon_{21}X+\varepsilon_{22}Y+\varepsilon_{23}Z\\
Z &= \varepsilon_{31}X+\varepsilon_{32}Y+\varepsilon_{33}Z
\end{aligned}\right.
\qquad
(\mathrm{II}')\ \left\{\begin{aligned}
L &= \mu_{11}L+\mu_{12}M+\mu_{13}N\\
M &= \mu_{21}L+\mu_{22}M+\mu_{23}N\\
N &= \mu_{31}L+\mu_{22}M+\mu_{33}N
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{III})\ \left\{\begin{aligned}
u &= \lambda_{11}(X-X')+\lambda_{12}(Y-Y')+\lambda_{13}(Z-Z')\\
v &= \lambda_{21}(X-X')+\lambda_{22}(Y-Y')+\lambda_{23}(Z-Z')\\
w &= \lambda_{31}(X-X')+\lambda_{32}(Y-Y')+\lambda_{33}(Z-Z').
\end{aligned}\right.
$$

[1] Wiedemann's Annalen, 40, pag. 577.

In queste equazioni è ben noto il significato delle varie lettere, e cioè $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$; X, Y, Z ; u, v, w sono respettivamente le componenti della polarizzazione, della forza e della corrente elettrica; mentre $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$; L, M, N sono respettivamente le componenti della polarizzazione e della forza magnetica; e x', y', z' quelle della forza elettromotrice.

2. Le equazioni (II), (II') e (III) discendono dalla ipotesi che lo stato attuale della polarizzazione elettrica e della corrente elettrica dipendano dallo stato attuale della forza elettrica; e, analogamente, lo stato attuale della polarizzazione magnetica dipenda dallo stato attuale della forza magnetica.

Ora, la teoria precedente non dà che una prima approssimazione dell'andamento dei fenomeni, giacchè essa esclude i fenomeni d'isteresi. Questi ultimi conducono a ritenere che lo stato attuale della polarizzazione magnetica non dipenda soltanto dalla forza magnetica attuale, ma da tutta la sua storia anteriore, ossia che la polarizzazione magnetica in un punto dipenda, oltre che dalla forza magnetica attuale in quel punto, anche da tutti i valori che precedentemente all'istante attuale ha avuto la forza magnetica nel punto stesso. In modo analogo può dirsi per la polarizzazione elettrica riguardo alla forza elettrica.

Volendo dunque avere una approssimazione successiva e tener conto della isteresi converrà introdurre nei secondi membri delle equazioni (II) e (II') dei termini di correzione e scrivere

$$(\mathrm{II}_a)\quad \begin{cases} \mathcal{X}(t) = \varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{12}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{13}\,\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_1\left|\left[\mathrm{X}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{Y}(\tau)}}\,,\,\mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \\[2ex] \mathcal{Y}(t) = \varepsilon_{21}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{22}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{23}\,\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_2\left|\left[\mathrm{X}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{Y}(\tau)}}\,,\,\mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \\[2ex] \mathcal{Z}(t) = \varepsilon_{31}\,\mathrm{X}(t) + \varepsilon_{32}\,\mathrm{Y}(t) + \varepsilon_{33}\,\mathrm{Z}(t) + \mathrm{F}_3\left|\left[\mathrm{X}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{Y}(\tau)}}\,,\,\mathrm{Z}(\tau)\right]\right| \end{cases}$$

in cui $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3$ denotano delle quantità che dipendono da tutti i valori di $\mathrm{X}(\tau), \mathrm{Y}(\tau), \mathrm{Z}(\tau)$ corrispondenti a valori dell'argomento τ da $-\infty$ a t, cioè corrispondenti a tutti i tempi anteriori all'istante t. In modo analogo si scriverà

$$(\mathrm{II}'_a)\quad \begin{cases} \mathcal{L}(t) = \mu_{11}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{12}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{13}\,\mathrm{N}(t) + \Phi_1\left|\left[\mathrm{L}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{M}(\tau)}}\,,\,\mathrm{N}(\tau)\right]\right| \\[2ex] \mathcal{M}(t) = \mu_{21}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{22}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{23}\,\mathrm{N}(t) + \Phi_2\left|\left[\mathrm{L}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{M}(\tau)}}\,,\,\mathrm{N}(\tau)\right]\right| \\[2ex] \mathcal{N}(t) = \mu_{31}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{32}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{33}\,\mathrm{N}(t) + \Phi_3\left|\left[\mathrm{L}(\tau)\,,\,\underset{-\infty}{\overset{t}{\mathrm{M}(\tau)}}\,,\,\mathrm{N}(\tau)\right]\right| \end{cases}$$

Noi ricorriamo in tal modo al concetto che abbiamo introdotto e sviluppato nel 1887 col nome di *funzioni dipendenti da altre funzioni* (¹) facendo uso della relativa notazione. Ammesse soddisfatte le condizioni volute potremo sviluppare ciascuna funzione F_i in una serie infinita di termini ciascuno dei quali ha la forma

$$\int_{-\infty}^{t} \cdots \int_{-\infty}^{t} G_i(\tau_1' \dots \tau_h' | \tau_1'' \dots \tau_k'' | \tau_1''' \dots \tau_e''')\, X(\tau_1') \dots$$
$$\dots X(\tau_h')\, Y(\tau_1'') \dots Y(\tau_k'')\, Z(\tau_1''') \dots Z(\tau_e''')\, d\tau' \dots d\tau_e'''$$

e la cosa analoga potrà dirsi per ciascuna Φ_i.

Ora se noi ammettiamo come postulato che gli effetti della sovrapposizione di forze elettriche o di forze magnetiche si sommino, cioè supponiamo

$$F_i \Big|\Big[X(\tau) + X'(\tau),\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}} + Y'(\tau),\, Z(\tau) + Z'(\tau)\Big]\Big| =$$
$$= F_i \Big|\Big[X(\tau),\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y(\tau)}},\, Z(\tau)\Big]\Big| + F_i \Big|\Big[X'(\tau),\, \underset{-\infty}{\overset{t}{Y'(\tau)}},\, Z'(\tau)\Big]\Big|,$$

$$\Phi_i \Big|\Big[L(\tau) + L'(\tau),\, M(\tau) + \underset{-\infty}{\overset{t}{M'(\tau)}},\, N(\tau) + N'(\tau)\Big]\Big| =$$
$$= \Phi_i \Big|\Big[L(\tau),\, \underset{-\infty}{\overset{t}{M(\tau)}},\, N(\tau)\Big]\Big| + \Phi_i \Big|\Big[L'(\tau),\, \underset{-\infty}{\overset{t}{M'(\tau)}},\, N'(\tau)\Big]\Big|$$

dovremo avere

$$F_i = \int_{-\infty}^{t} \{ X(\tau)\, \varphi_{i1}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{i2}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{i3}(t,\tau) \}\, d\tau$$

$$\Phi_i = \int_{-\infty}^{t} \{ L(\tau)\, \psi_{i1}(t,\tau) + M(\tau)\, \psi_{i2}(t,\tau) + N(\tau)\, \psi_{i3}(t,\tau) \}\, d\tau$$

onde le (II_a) (II'_a) diverranno

$$(II_b) \left\{ \begin{aligned} \mathcal{X}(t) &= \varepsilon_{11} X(t) + \varepsilon_{12} Y(t) + \varepsilon_{13} Z(t) + \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{11}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{12}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{13}(t,\tau))\, d\tau \\ \mathcal{Y}(t) &= \varepsilon_{21} X(t) + \varepsilon_{22} Y(t) + \varepsilon_{23} Z(t) + \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{21}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{22}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{23}(t,\tau))\, d\tau \\ \mathcal{Z}(t) &= \varepsilon_{31} X(t) + \varepsilon_{32} Y(t) + \varepsilon_{33} Z(t) + \\ &\quad + \int_a^t (X(\tau)\, \varphi_{31}(t,\tau) + Y(\tau)\, \varphi_{32}(t,\tau) + Z(\tau)\, \varphi_{33}(t,\tau))\, d\tau \end{aligned} \right.$$

(¹) Rend. Acc. dei Lincei, vol. III, 1887.

$$
(\mathrm{II}'_b)\quad
\begin{cases}
L(t) = \mu_{11}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{12}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{13}\,\mathrm{N}(t) + \\
\qquad + \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{11}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{12}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{13}(t,\tau))\,d\tau \\
M(t) = \mu_{21}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{22}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{23}\,\mathrm{N}(t) + \\
\qquad + \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{21}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{22}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{23}(t,\tau))\,d\tau \\
N(t) = \mu_{31}\,\mathrm{L}(t) + \mu_{32}\,\mathrm{M}(t) + \mu_{33}\,\mathrm{N}(t) + \\
\qquad + \int_a^t (\mathrm{L}(\tau)\,\psi_{31}(t,\tau) + \mathrm{M}(\tau)\,\psi_{32}(t,\tau) + \mathrm{N}(\tau)\,\psi_{33}(t,\tau))\,d\tau
\end{cases}
$$

in cui deve supporsi che il limite inferiore a degli integrali sia $-\infty$.

Se noi supponiamo che le forze elettriche e magnetiche anteriori ad un dato istante t_0 siano trascurabili, allora basterà prendere il limite inferiore a dei precedenti integrali eguali a t_0.

Sostituendo alle equazioni (II) e (II′) le precedenti equazioni (II_b) e (II'_b) si vede subito che le equazioni (I) e (I′) indefinite dei campi elettromagnetici divengono delle equazioni *integro-differenziali* (¹).

Dal punto di vista analitico il tipo delle equazioni non cambierebbe se anche alle (III) si sostituissero delle relazioni integrali di forma analoga alle relazioni (II_b) e (II'_b).

Art. II. — *I coefficienti.*

1. Nelle equazioni (II_b) e (II'_b) figurano scritte esplicitamente le sole variabili t, τ, ma dovremo tener presente che X, Y, Z; L, M, N; $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$; $\mathrm{L}, \mathrm{M}, \mathrm{N}$ sono funzioni anche di x, y, z. In generale anche i coefficienti ε_{rs}, μ_{rs} saranno funzioni di x, y, z e così pure i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}; solo nel caso di un mezzo omogeneo potremo ritenere i detti coefficienti indipendenti da x, y, z.

Quando si passa da un mezzo ad un altro, lungo la superficie limite avranno luogo delle equazioni di condizione che possono senz'altro aversi col mezzo tenuto da Hertz nel § 8 della citata Memoria a cui rimandiamo.

2. Supposto il limite inferiore degl'integrali finito nelle (II_b) e (II'_b) potremo invertire le equazioni stesse coi metodi che detti per la risoluzione delle equazioni integrali (²), essendo il determinante delle ε_{rs} e delle μ_{rs} diverso da zero, e potremo quindi esprimere le componenti della forza elettrica per mezzo delle componenti della polarizzazione elettrica e le componenti della forza magnetica per mezzo delle componenti della polarizzazione magnetica.

(¹) Rend. Acc. Lincei, 7 e 21 febbraio 1909.

(²) Rend. Acc. dei Lincei, 1896, *Sulla inversione degli integrali definiti*, § 5.

3. È facile trovare il significato dei coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs}. Così

$$\varphi_{11}(t\,,\tau)\,d\tau\ ,\ \varphi_{21}(t\,,\tau)\,d\tau\ ,\ \varphi_{31}(t\,,\tau)\,d\tau$$

rappresentano le componenti della polarizzazione elettrica indotta al tempo t da una forza elettrica unitaria che ha agito nella direzione x nell'intervallo di tempo $(\tau\,,\tau+d\tau)$.

4. Nella ipotesi che le componenti della forza elettrica e della forza magnetica si mantengano sempre inferiori a limiti finiti, nel caso di $a=-\infty$ nelle (II_b) e (II'_b) converrà ammettere che i coefficienti φ_{rs} e ψ_{rs} siano infinitesimi per $\tau=-\infty$, e più precisamente supporremo

$$(1)\qquad |\varphi_{rs}(t\,,\tau)|<\frac{\mathrm{B}}{(t-\tau)^{1+\varepsilon}}\qquad |\psi_{rs}(t\,,\tau)|<\frac{\mathrm{B}'}{(t-\tau)^{1+\varepsilon'}}$$

con $\varepsilon>0\,,\varepsilon'>0$ e B e B' costanti finite positive.

Art. III. — *Condizione del cappio chiuso.*

1. Consideriamo un punto F dello spazio avente le coordinate X, Y, Z ed un altro punto P avente le coordinate X, Y, Z. Spostandosi F con continuità si sposterà P con continuità ed ambedue i punti descriveranno due linee.

Supponiamo ora che *ogni qualvolta* F *descrive periodicamente una traiettoria chiusa,* P *descriva pure periodicamente e con lo stesso periodo una traiettoria chiusa*; in altri termini *se* $\mathrm{X}(\tau)\,,\mathrm{Y}(\tau)\,,\mathrm{Z}(\tau)$ *sono funzioni periodiche qualunque di* τ, $X(t)\,,Y(t)\,,Z(t)$ *siano pure funzioni periodiche collo stesso periodo di t* (¹).

2. Chiameremo questa condizione la *condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica,* ed andremo a ricavarne le conseguenze.

Riprendiamo la prima delle (II_b) e supponiamo $\mathrm{Y}=\mathrm{Z}=0$ e X periodica col periodo $\mathrm{T}>0$. Avremo

$$X(t+\mathrm{T})=\varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t+\mathrm{T})+\int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}}\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau$$

e in virtù della condizione del cappio chiuso

$$X(t)=\varepsilon_{11}\,\mathrm{X}(t)+\int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}}\mathrm{X}(\tau)\,\varphi_{11}(t+\mathrm{T}\,,\tau)\,d\tau$$

(¹) Naturalmente dovremo ammettere che la periodicità abbia luogo dal tempo $-\infty$, ossia dovremo supporre nelle (II_b) il limite inferiore $-\infty$. Se il limite inferiore fosse finito dovrebbero supporsi $\mathrm{X}(t)\,,\mathrm{Y}(t)\,,\mathrm{Z}(t)$ nulle pei valori di τ inferiori ad un dato limite, il che sarebbe in contradizione colla ipotesi della periodicità.

quindi

$$\int_{-\infty}^{t} X(\tau)\,\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t+T} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau)\,d\tau =$$
$$= \int_{-\infty}^{t} X(\tau)\,\varphi_{11}(t+T,\tau+T)\,d\tau\,.$$

Siccome $X(\tau)$ è una funzione periodica arbitraria col periodo T, così dall'equazione precedente segue

$$\varphi_{11}(t,\tau) + \sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t,\tau-nT) = \varphi_{11}(t+T,\tau+T) + \sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t+T,\tau-nT)$$

in cui τ è compreso fra t e $t-T$.

Le due serie, saranno convergenti in virtù delle (1) e avremo

$$\left|\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t,\tau-nT)\right| < \frac{B}{T^{1+\varepsilon}}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

$$\left|\sum_{0}^{\infty}{}_{n}\,\varphi_{11}(t-T,\tau-nT)\right| < \frac{B}{T^{1+\varepsilon}}\sum_{1}^{\infty}{}_{n}\,\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

quindi

$$\varphi_{11}(t,\tau) = \varphi_{11}(t+T,\tau+T) + \frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

ove η è un numero compreso fra $+1$ e -1.

Se $\lambda < T-(t-\tau)$, avremo che $T-\lambda$ sarà positivo e $\tau+\lambda$ sarà compreso fra $t+\lambda$ e $t+\lambda-(T-\lambda)$, perciò nella equazione precedente si potrà cambiare t, τ, T respettivamente in $t+\lambda$, $\tau+\lambda$, $T-\lambda$ e avremo

$$\varphi_{11}(t,\tau) - \varphi_{11}(t+\lambda,\tau+\lambda) = \left(\frac{2B\eta}{T^{1+\varepsilon}} - \frac{2B\eta'}{(T-\lambda)^{1+\varepsilon}}\right)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$$

essendo η' un numero compreso fra $+1$ e -1.

Siccome questa equazione vale comunque grande sia T, così dovrà essere

$$\varphi_{11}(t,\tau) = \varphi_{11}(t+\lambda,\tau+\lambda)$$

qualunque sia λ e perciò $\varphi_{11}(t,\tau)$ sarà una funzione della differenza $t-\tau$.

Nello stesso modo si dimostra che *tutte le φ_{rs} sono funzioni di $t-\tau$.* Analogamente *se la condizione del cappio chiuso varrà per la polarizzazione magnetica i coefficienti ψ_{rs} saranno funzioni di $t-\tau$.*

3. Se ora ci riferiamo al significato trovato precedentemente per i coefficienti φ_{rs}, ψ_{rs}, potremo dire: *la condizione del cappio chiuso per la polarizzazione elettrica (o magnetica) significa che la polarizzazione elettrica (o magnetica) indotta dopo un dato tempo da una data forza elettrica*

(o magnetica) che ha agito durante un intervallo di tempo dt è invariabile qualunque sia l'istante in cui la forza elettrica (o magnetica) ha agito.

Questa condizione può chiamarsi *la invariabilità dell'isteresi elettrica (o magnetica)* attraverso il tempo, e perciò essa può considerarsi come una conseguenza della condizione del cappio chiuso.

4. Supponiamo ora reciprocamente che la condizione della invariabilità della isteresi elettrica sia soddisfatta, cioè i coefficienti φ_{rs} siano funzioni di $t-\tau$.

Dalle (II_b) segue, se le (1) son soddisfatte,

$$\begin{aligned} X(t+\mathrm{T}) &= \varepsilon_{11}\mathrm{X}(t+\mathrm{T}) + \varepsilon_{12}\mathrm{Y}(t+\mathrm{T}) + \varepsilon_{13}\mathrm{Z}(t+\mathrm{T}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{t+\mathrm{T}} (\mathrm{X}(\tau)\varphi_{11}(t+\mathrm{T}-\tau) + \mathrm{Y}(\tau)\varphi_{12}(t+\mathrm{T}-\tau) + \mathrm{Z}(\tau)\varphi_{13}(t+\mathrm{T}-\tau))\,d\tau \\ &= \varepsilon_{11}\mathrm{X}(t+\mathrm{T}) + \varepsilon_{12}\mathrm{Y}(t+\mathrm{T}) + \varepsilon_{13}\mathrm{Z}(t+\mathrm{T}) + \\ &+ \int_{-\infty}^{t} (\mathrm{X}(\tau+\mathrm{T})\varphi_{11}(t-\tau) + \mathrm{Y}(\tau+\mathrm{T})\varphi_{12}(t-\tau) + \mathrm{Z}(\tau+\mathrm{T})\varphi_{13}(t-\tau))\,d\tau \end{aligned}$$

quindi se X , Y , Z saranno periodiche col periodo T, anche $X(t)$ sarà periodica collo stesso periodo, e similmente si prova la periodicità di $Y(t)$ e $Z(t)$; mentre analoga dimostrazione si potrà fare pel magnetismo.

Dunque *la condizione della invariabilità della isteresi elettrica (o magnetica) porta come conseguenza quella del cappio chiuso della polarizzazione elettrica (o magnetica).*

ART. IV. — *Il caso statico e l'equazione integro-differenziale di tipo ellittico.*

1. Consideriamo ora il caso più semplice, cioè che il mezzo non sia conduttore e che le quantità L, M, N ; X, Y, Z variino col tempo così lentamente da poter trascurare $\frac{\partial L}{\partial t}, \frac{\partial M}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial t}$; $\frac{\partial X}{\partial t}, \frac{\partial Y}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial t}$ *(caso statico)*.

Avremo allora

$$\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} = 0$$

ossia

$$\mathrm{X} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\,, \quad \mathrm{Y} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}\,, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z}$$

$$\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x}\,, \quad \mathrm{M} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y}\,, \quad \mathrm{N} = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z}\,.$$

2. Supponiamo che le ε_{rs}, φ_{rs} siano indipendenti da x, y, z. Prendiamo per assi coordinati gli assi principali della quadrica

$$(2) \qquad \varepsilon_{11}x^2 + \varepsilon_{22}y^2 + \varepsilon_{33}z^2 + (\varepsilon_{23} + \varepsilon_{32})\,yz + (\varepsilon_{31} + \varepsilon_{13})\,zx + (\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21})\,xy = 1 .$$

Se questi coincidono cogli assi della quadrica

$$(3) \qquad \varphi_{11}x^2 + \varphi_{22}y^2 + \varphi_{33}z^2 + (\varphi_{23} + \varphi_{32})\,yz + (\varphi_{31} + \varphi_{13})\,zx + (\varphi_{12} + \varphi_{21})\,xy = 1$$

qualunque siano i valori di t e τ, le (II_b) diverranno

$$\begin{cases} X = \varepsilon_{11}\dfrac{\partial \mathrm{V}(t)}{\partial x} + \displaystyle\int_a^t \dfrac{\partial \mathrm{V}(\tau)}{\partial x}\,\varphi_{11}(t,\tau)\,d\tau \\ Y = \varepsilon_{22}\dfrac{\partial \mathrm{V}(t)}{\partial y} + \displaystyle\int_a^t \dfrac{\partial \mathrm{V}(\tau)}{\partial y}\,\varphi_{22}(t,\tau)\,d\tau \\ Z = \varepsilon_{33}\dfrac{\partial \mathrm{V}(t)}{\partial z} + \displaystyle\int_a^t \dfrac{\partial \mathrm{V}(\tau)}{\partial z}\,\varphi_{33}(t,\tau)\,d\tau \end{cases}$$

e perciò se

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0$$

si avrà, supposto $a = t_0 = 0$

$$\varepsilon_{11}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial x^2} + \varepsilon_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial y^2} + \varepsilon_{33}\frac{\partial^2 \mathrm{V}(t)}{\partial z^2} + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2}\varphi_{11} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2}\varphi_{22} + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2}\varphi_{33}\right) d\tau = 0 ,$$

la quale con un cambiamento lineare nelle variabili x, y, z si riduce all'equazione integro-differenziale

$$\Delta^2 \mathrm{V}(t) + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial x^2} f(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial y^2}\varphi(t,\tau) + \frac{\partial^2 \mathrm{V}(\tau)}{\partial z^2}\psi(t,\tau)\right) d\tau = 0$$

di cui abbiamo dato il tipo del processo d'integrazione in una Nota precedente (1). Non si incontrerebbero maggiori difficoltà se la quadrica (3) avesse assi variabili con τ e t.

3. Scopo principale della presente Nota è stato quello di mettere in luce l'origine della precedente equazione integro-differenziale. Nello stesso tempo l'analisi impiegata nella Nota citata prova che, anche lasciando del tutto arbitrarie le funzioni che individuano l'isteresi, si può procedere a

(1) Rend. Acc. dei Lincei, sedute 7 e 21 febbraio 1909.

trattazioni sistematiche, senza che le questioni abbiano un grado di indeterminatezza o presentino difficoltà tali da essere inadeguate ai mezzi analitici di cui oggi possiamo disporre.

Come nelle varie questioni di fisica matematica e di meccanica analitica conviene lasciare, finchè è possibile, indeterminati i coefficienti, salvo poi a fissarli nelle questioni concrete, così in modo analogo appare qui conveniente di lasciare indeterminate le funzioni sopra ricordate, risolvendo le questioni colla maggior generalità possibile, salvo poi a fissare le funzioni stesse caso per caso o anche a cercar di determinarle, desumendole dal confronto delle formule risolutive con i resultati dell'osservazione. In tal modo si rivela il carattere proprio dei metodi che si riattaccano al concetto di funzioni dipendenti da altre funzioni a cui appartengono quelli impiegati nelle questioni delle equazioni integrali [1] e delle equazioni integro-differenziali.

Meccanica. — *Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Supponiamo conosciuto un modo di distribuzione di materia attrattiva entro lo spazio τ limitato da una superficie chiusa S, e chiediamoci quali variazioni si possano apportare a quel modo di distribuzione senza che resti alterata la attrazione che la massa esercita sui punti esterni ad S.

Possiamo porre il problema sotto la forma seguente. Siano k e $k' = k + h$ due funzioni finite delle coordinate x, y, z dei punti di τ, e chiamiamo C e C′ i due corpi materiali, entrambi non esterni ad S, le cui densità generiche sono k e k'; si vuole che

$$\int_\tau \frac{k \,.\, d\tau}{r} = \int_\tau \frac{(k+h)\, d\tau}{r}, \tag{1}$$

ove r è la distanza dell'elemento $d\tau$ da un punto qualunque *esterno* ad S. I corpi C, C′ si diranno *equivalenti* rispetto alla attrazione newtoniana esterna. Se si immagina un corpo (ideale) C″ la cui densità generica sia h, la funzione potenziale di esso sui punti esterni ad S sarà *nulla*, poichè dalla (1) si deduce

$$\int_\tau \frac{h \,.\, d\tau}{r} = 0\,;$$

lo chiameremo *corpo di attrazione nulla*.

[1] Compte rendus, 1906, 1er Sémestre, page 696.