ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

trattazioni sistematiche, senza che le questioni abbiano un grado di indeterminatezza o presentino difficoltà tali da essere inadeguate ai mezzi analitici di cui oggi possiamo disporre.

Come nelle varie questioni di fisica matematica e di meccanica analitica conviene lasciare, finchè è possibile, indeterminati i coefficienti, salvo poi a fissarli nelle questioni concrete, così in modo analogo appare qui conveniente di lasciare indeterminate le funzioni sopra ricordate, risolvendo le questioni colla maggior generalità possibile, salvo poi a fissare le funzioni stesse caso per caso o anche a cercar di determinarle, desumendole dal confronto delle formule risolutive con i resultati dell'osservazione. In tal modo si rivela il carattere proprio dei metodi che si riattaccano al concetto di funzioni dipendenti da altre funzioni a cui appartengono quelli impiegati nelle questioni delle equazioni integrali [1] e delle equazioni integro-differenziali.

Meccanica. — *Corpi equivalenti rispetto alla attrazione newtoniana esterna.* Nota del Corrispondente P. Pizzetti.

1. Supponiamo conosciuto un modo di distribuzione di materia attrattiva entro lo spazio τ limitato da una superficie chiusa S, e chiediamoci quali variazioni si possano apportare a quel modo di distribuzione senza che resti alterata la attrazione che la massa esercita sui punti esterni ad S.

Possiamo porre il problema sotto la forma seguente. Siano k e $k' = k + h$ due funzioni finite delle coordinate x, y, z dei punti di τ, e chiamiamo C e C' i due corpi materiali, entrambi non esterni ad S, le cui densità generiche sono k e k'; si vuole che

$$\int_\tau \frac{k \,.\, d\tau}{r} = \int_\tau \frac{(k+h)\,d\tau}{r}, \tag{1}$$

ove r è la distanza dell'elemento $d\tau$ da un punto qualunque *esterno* ad S. I corpi C, C' si diranno *equivalenti* rispetto alla attrazione newtoniana esterna. Se si immagina un corpo (ideale) C'' la cui densità generica sia h, la funzione potenziale di esso sui punti esterni ad S sarà *nulla*, poichè dalla (1) si deduce

$$\int_\tau \frac{h \,.\, d\tau}{r} = 0\,;$$

lo chiameremo *corpo di attrazione nulla*.

[1] Compte rendus, 1906, 1er Sémestre, page 696.

L'enunciato problema di equivalenza si riduce pertanto alla ricerca di tutti i corpi di attrazione nulla, interni o, almeno, non esterni alla superficie S. Potremo dire che la densità di un corpo C' equivalente a un dato corpo C, è, in ogni punto, la somma algebrica della densità k di C, in quel punto, e di quella h di un corpo di attrazione nulla, sempre nello stesso punto. Ma, naturalmente, tra gli infiniti corpi di attrazione nulla che convengono ad un dato spazio τ, si avranno a considerare, per la realtà fisica della soluzione, soltanto quelli pei quali la detta somma algebrica risulta non minore di zero. Basterà per questo che, detto k_m il valor minimo della densità nel corpo C ed h_m il minimo (algebrico) di h, sia $-h_m < k_m$, o, più semplicemente, che il valore assoluto di h non superi un certo limite.

2. Assunto, entro lo spazio τ chiuso dalla superficie S, un punto O come origine di coordinate, e indicate con ϱ e con ϱ' le distanze rispettive di O dall'elemento $d\tau$ e da un punto P esterno ad S, e con r la distanza di P da $d\tau$, avremo col noto sviluppo

$$(2)\qquad \int_\tau \frac{h \, . \, d\tau}{r} = \sum_0^\infty \frac{1}{\varrho'^{n+1}} \int_\tau \varrho^n \, . \, P_n \, . \, h \, . \, d\tau \, ,$$

purchè si supponga il punto P abbastanza lontano perchè sia sempre $\varrho < \varrho'$. È qui indicato con P_n il polinomio di ordine n di Legendre, che ha per argomento il coseno dell'angolo fra i due raggi vettori ϱ, ϱ'. Affinchè la (2) si annulli per ogni punto esterno P, è necessario e sufficiente che sia, per ogni valore intero e positivo di n,

$$(3)\qquad \int_\tau \varrho^n \, . \, P_n \, . \, h \, . \, d\tau = 0 \, .$$

Posto in questa successivamente $n = 0, 1, 2$, si deducono in modo ovvio dalle (3) i risultati seguenti:

$$\int_\tau h \, . \, d\tau = 0 \quad , \qquad \int_\tau x \, . \, h \, . \, d\tau = 0$$

$$\int_\tau x \, . \, y \, . \, h \, . \, d\tau = 0 \, , \qquad \int_\tau (x^2 - y^2) \, h \, . \, d\tau = 0$$

e le altre sei relazioni che, con rotazione delle lettere x, y, z, si deducono dalle tre ultime.

Sostituendo per h la differenza $k' - k$ fra le densità dei due corpi equivalenti C, C', queste relazioni possono enunciarsi così:

a) *Le masse dei due corpi sono eguali* (il che era del resto evidente per le proprietà della funzione potenziale all'infinito).

b) *I due corpi hanno lo stesso centro di massa.*

c) *Essi hanno gli stessi assi principali d'inerzia.*

d) *I loro momenti principali d'inerzia sono equidifferenti.*

I due ultimi enunciati si riferiscono propriamente all'ellissoide *centrale* d'inerzia, ma, le masse essendo eguali, essi si estendono all'ellissoide d'inerzia relativo ad ogni altro punto.

Il teorema da me dimostrato in un precedente lavoro [1], che: *se la funzione potenziale esterna di un corpo è simmetrica rispetto ad un asse, l'ellissoide centrale di inerzia è di rotazione,* può considerarsi come conseguenza particolare dell'enunciato *d*).

Si può, senza molto limitare il campo d'applicazione della ricerca, supporre la superficie S una sfera; giacchè non è necessario che i corpi considerati riempiano *tutto* lo spazio τ.

Chiamiamo R il raggio della sfera e ammettiamo che la densità h nei punti di una qualunque sfera concentrica di raggio $\varrho\ (\leqq \mathrm{R})$ sia esprimibile colla serie

$$h = \sum_0^\infty \mathrm{A}_s \, \mathrm{Y}_s \tag{4}$$

dove Y_s è *funzione sferica di ordine s* dei due angoli (θ e v, colatitudine e longitudine) che fissano la direzione del raggio vettore ϱ. Al variare di ϱ, varieranno i coefficienti A_s; *ammettiamo che* A_s *sia funzione integrabile di* ϱ nell'intervallo $(0\,,\,\mathrm{R})$. Allora dalle notissime proprietà delle funzioni sferiche si deduce che, affinchè la (3) sia soddisfatta, è necessario e sufficiente che A_s soddisfaccia all'unica condizione

$$\int_0^{\mathrm{R}} \varrho^{s+2} \, \mathrm{A}_s . d\varrho = 0 \,. \tag{5}$$

3. Si può trattare il problema (e giungere in particolare alla condizione (5)) in un altro modo. Detta $f(x\,,y\,,z)$ la funzione potenziale del corpo C″ di attrazione esterna nulla, per un punto qualunque del considerato spazio τ, questa dovrà essere finita e continua insieme colle sue derivate 1ᵉ e avere le derivate 2ᵉ finite e integrabili. E di più pei punti della superficie S dovrà aversi

$$f = 0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \,, \tag{6}$$

giacchè la funzione potenziale di C″ è nulla all'esterno e, d'altra parte, essa e le sue derivate 1ᵉ variano con continuità nel passaggio attraverso S.

Reciprocamente, ogni funzione f delle coordinate di τ, la quale, insieme colla sua derivata] normale, si annulli sulla superficie S, e soddisfaccia, entro τ, alle sopradette condizioni di regolarità, potrà considerarsi come fun-

[1] *Relazioni fra i momenti d'inerzia di un corpo del quale la funzione potenziale è simmetrica intorno ad un asse.* Questi Rendiconti, 1° semestre 1905.

zione potenziale interna di un corpo di attrazione nulla, contenuto entro S, la cui densità generica sia espressa da

$$h = -\frac{\Delta_2 f}{4\pi} \tag{7}$$

Infatti una notissima formola di Stokes, ove si indichi con r la distanza dell'elemento $d\tau$ da un punto interno, dà in forza delle (6):

$$f = -\frac{1}{4\pi}\int_\tau \frac{\Delta_2 f}{r}\, d\tau .$$

Così, se la superficie S è rappresentata da una equazione

$$F(x, y, z) = 0$$

ove $F(x, y, z)$ è funzione che, nell'interno di τ, soddisfaccia alle già dette condizioni di regolarità, si avrà un'infinità di soluzioni del problema coll'assumere

$$f = [F(x, y, z)]^2 . \varphi(x, y, z)$$

dove φ è funzione qualunque, soggetta soltanto alle stesse condizioni di regolarità.

Supposto ancora che la S sia una sfera, la f potrà porsi sotto la forma

$$f = \sum_0^\infty B_s(\varrho) . Y_s , \tag{8}$$

dove le $B_s(\varrho)$ sono funzioni finite e continue di ϱ insieme colle loro derivate 1^e, e dovranno soddisfare alle condizioni

$$B_s = 0 \qquad \frac{dB_s}{d\varrho} = 0 \qquad \text{per } \varrho = R . \tag{9}$$

Tenuto conto dell'equazione alle derivate parziali cui le funzioni sferiche Y_s soddisfanno, si ha senza difficoltà

$$\Delta_2 f = \frac{1}{\varrho^2}\sum_0^\infty \left\{ \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dB_s}{d\varrho}\right) - s(s+1)\, B_s \right\} Y_s .$$

Quindi la (7) dà

$$h = \sum_0^\infty A_s\, Y_s ,$$

ove si ponga

$$A_s = \frac{-1}{4\pi\varrho^2}\left\{ \frac{d}{d\varrho}\left(\varrho^2 \frac{dB_s}{d\varrho}\right) - s(s+1)\, B_s \right\} . \tag{10}$$

Colla integrazione per parti, è facilissimo verificare che la A_s definita dalla (10), tenuto conto delle (9) soddisfa alla equazione integrale (5).

4. Un ultimo modo, molto generale, di ricerca di corpi di attrazione nulla è il seguente.

Si consideri un corpo sferico, formato di strati sferici concentrici di uniforme densità, e nel quale la densità $f(\varrho)$ a distanza ϱ dal centro soddisfaccia alla condizione

$$\int_0^c \varrho^2 \cdot f(\varrho) \cdot d\varrho = 0$$

ove con c si indica il raggio della sfera esterna. Un tal corpo esercita attrazione *nulla* all'esterno.

Si divida ora lo spazio τ da principio considerato in elementi infinitesimi $d\tau$ e si considerino gli infiniti solidi sferici aventi i loro centri nei baricentri degli elementi $d\tau$, il raggio c funzione delle coordinate del rispettivo centro e la densità generica $f(\varrho)$ uguale a

$$b \cdot \varphi(\varrho\,, c) \cdot d\tau$$

dove b è essa pure funzione delle coordinate del centro e $\varphi(\varrho\,, c)$ soddisfa alla

$$\int_0^c \varrho^2 \cdot \varphi(\varrho\,, c) \cdot d\tau = 0\,.$$

Un tal sistema di solidi sferici costituirà un corpo di attrazione nulla. Il modo di variare del raggio c sarà soggetto all'unica condizione che niuno dei considerati solidi sferici esca fuori dalla superficie S limitante lo spazio τ. Non è difficile dimostrare che, in particolare, si può scegliere la funzione b in guisa che, escluso uno strato di grossezza finita aderente alla superficie S, la densità h della rimanente parte dello spazio τ risulti uguale ad una *costante* arbitraria. Il che è quanto dire che si può accrescere o diminuire di una costante qualsiasi la densità nell'*interno* di un corpo, purchè si alteri opportunamente la densità degli strati prossimi alla superficie.

Ma di questi risultati, come pure dei precedenti, darò sviluppata relazione in un più esteso lavoro che intendo pubblicare altrove.