ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

cialmente, arrotondato e fornito di varie setole abbastanza lunghe; il terzo articolo è piccolissimo, affatto rudimentale.

Habitat. Raccolsi varî esemplari di questa specie presso Lebanon nell'Oregono.

Dedico questa specie al collega R. W. Miner del Museo americano di storia naturale di New York.

Matematica. — *Sulle serie di Dirichlet.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Socio Salvatore Pincherle.

È noto che, se una serie di Dirichlet

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z} \tag{1}$$

(dove a_n è un numero generalmente complesso, e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ è una successione di numeri positivi crescenti e tali che $\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty$) converge in un punto z_0, essa converge per ogni valore di z tale che sia $R(z) > R(z_0)$ [1]. Questa proposizione vale anche, come ha mostrato W. Schnee [2], per quelle serie di Dirichlet più generali che hanno l'esponente λ_n reale o complesso, purchè sottoposto a certe *condizioni limiti*.

La condizione della convergenza nel punto z_0 non è, però, necessaria per concludere alla convergenza delle serie in tutto il semipiano $R(z) > R(z_0)$. Come già si sa, basta porre la condizione che la $\sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$ si mantenga, per ogni r, minore in valore assoluto di un numero finito, fisso. Ora, io mi propongo di far vedere che questa condizione può essere allargata ancora più; e cioè che non è necessario porre la finitezza della somma $\sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$. Più precisamente, mostro che *se, preso un numero positivo η, si può poi sempre determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $r > \bar{n}$, sia*

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < e^{\eta \lambda_r},$$

la serie (1) *è convergente in tutto il semipiano* $R(z) > R(z_0)$.

Da questa proposizione deduco poi un corollario relativo alle ordinarie serie di potenze. Esso è il seguente: *se, in un dato punto x_0, il termine generale $a_n x_0^n$ di una serie di potenze $\Sigma a_n x^n$ tende in modulo all'infinito,*

[1] $R(z)$ indica la parte reale di z.

[2] *Ueber irreguläre Pontenzreihen und Dirichletsche Reihen.* Inaugural-Dissertation, Berlino, 1908.

purchè di un certo ordine rispetto ad n (di ordine finito, p. es.), *la serie è convergente nel cerchio* $(0, |x_0|)$.

Questa proposizione è una generalizzazione di quella ben nota che stabilisce la convergenza di $\Sigma a_n x^n$ nel cerchio $(0, |x_0|)$ nell'ipotesi che, per ogni $n > \bar{n}$, sia $|a_n x_0^n| < M$, con M numero determinato e finito.

Nel § 2, dimostro che, *affinchè due serie di Dirichlet*

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} \quad , \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z}$$

rappresentino la stessa funzione, è necessario e sufficiente che, per tutti gli n, sia

$$a_n = a'_n \quad , \quad \lambda_n = \lambda'_n$$

(naturalmente si suppone che i coefficienti a_n e a'_n siano tutti $\neq 0$).

§ 1.

1. Si consideri la serie (1) e, z_0 essendo un determinato punto del piano della variabile z, si faccia l'ipotesi che, preso un numero positivo η, si possa poi sempre determinare un $\bar{n}$ tale che, per ogni $r > \bar{n}$, sia

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < e^{\eta \lambda_r} . \tag{2}$$

Ponendo $z = z_0 + z'$, si ha

$$\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_1^m (a_n e^{-\lambda_n z_0}) e^{-\lambda_n z'} ,$$

ed applicando la trasformazione d'Abel,

$$\sum_1^m a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{r=1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) + S_m(z_0) e^{-\lambda_{m+1} z'} , \tag{3}$$

dove si è posto, per semplicità di scrittura, $S_r(z_0) = \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0}$. Mostriamo, ora, che se è $R(z') > 0$, ciascuna delle due parti del secondo membro di (3) ammette un limite determinato e finito per $m = \infty$. Per ogni $m > \bar{n}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) &= \sum_{r=1}^{\bar{n}} S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) + \\ &+ \sum_{r=\bar{n}+1}^m S_r(z_0) (e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}) . \end{aligned} \tag{4}$$

Abbiamo, poi,

$$e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'} = z' \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-t z'} \, dt ,$$

e, ponendo $z' = z'_1 + iz'_2$,

$$|e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'}| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-tz'_1}\, dt .$$

Tenendo conto della (2), abbiamo, per ogni $r > \bar{n}$,

$$|S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-t(z'_1 - \eta)}\, dt .$$

Poichè η, essendo arbitrario, può prendersi minore di $\frac{z'_1}{2}$, otteniamo

$$|S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| \leq |z'| \int_{\lambda_r}^{\lambda_{r+1}} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt .$$

Siccome poi

$$\int_{\lambda_{\bar{n}+1}}^{\infty} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt$$

converge, è

$$\lim_{m=\infty} \sum_{r=\bar{n}+1}^{m} |S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})| < |z'| \int_{\lambda_{\bar{n}+1}}^{\infty} e^{-\frac{tz'_1}{2}}\, dt .$$

Segue, dalla (4), che la serie

$$\sum_{r=1}^{\infty} S_r(z_0)\,(e^{-\lambda_r z'} - e^{-\lambda_{r+1} z'})$$

converge assolutamente, e quindi anche semplicemente; cioè che la prima parte del secondo membro di (3) ammette, per $m = \infty$, un limite determinato e finito. Lo stesso, poi, avviene per la seconda parte, poichè, per la (2), è

$$|S_m(z_0)\, e^{-\lambda_{m+1} z'}| < e^{\eta \lambda_m} \,.\, e^{-\lambda_{m+1} z'_1} < e^{-\lambda_m (z'_1 - \eta)}$$

per ogni $m > \bar{n}$; ed essendosi preso $\eta < \frac{z'_1}{2}$, risulta

$$|S_m(z_0)\, e^{-\lambda_{m+1} z'}| < e^{-\lambda_m \frac{z'_1}{2}} .$$

Dunque il primo membro di (3) ammette, per $m = \infty$, un limite determinato e finito, vale dire, per ogni z tale che sia $R(z) > R(z_0)$, la serie $\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ è convergente.

2. La proposizione ora stabilita vale anche nel caso più generale in cui: 1°, la successione $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sia composta di numeri generalmente com-

plessi e tali che, posto $\lambda_n = \alpha_n + i\beta_n$, sia da un certo punto in poi $0 < \alpha_n < \alpha_{n+1}$; 2°, sia $\lim_{n=\infty} \alpha_n = \infty$ e $\lim_{n=\infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = 0$; 3°, la successione λ_1, λ_2, ... sia tale che, preso un numero positivo η, si possa sempre, corrispondentemente, determinare un numero $\bar{n}$ in modo che, per tutti gli $n > \bar{n}$, sia

$$\left| \frac{\beta_{n+1} - \beta_n}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} \right| < e^{\eta \alpha_n}.$$

3. Come caso particolare della proposizione dimostrata si ha: *se esiste un numero reale s tale che sia, per ogni r maggiore di un certo* $\bar{n}$,

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-\lambda_n z_0} \right| < \lambda_r^s,$$

la serie $\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$ *converge in tutto il semipiano* $R(z) < R(z_0)$. Preso, infatti, un numero reale η, è

$$\lambda_r^s = \frac{(\eta \lambda_r)^s}{\eta^s e^{\eta \lambda_r}} e^{\eta \lambda_r},$$

e, per essere

$$\lim_{n=\infty} \frac{(\eta \lambda_r)^s}{\eta^s e^{\eta \lambda_r}} = 0,$$

si può determinare un $\bar{\bar{n}}$ a partir dal quale sia $\lambda_r^s < e^{\eta \lambda_r}$.

4. Si abbia, ora, un'ordinaria serie di potenze $\Sigma a_n x^n$, e si supponga che, per un certo $x_0 \neq 0$, sia, a partire da un indice $\bar{n}$,

$$|a_n x_0^n| < n^s$$

(s numero positivo). Si ponga $z = -\log x$: si avrà

$$\Sigma a_n x^n = \Sigma a_n e^{-nz},$$

e, per $n > \bar{n}$, $|a_n e^{-nz_0}| < n^s$ ($z_0 = -\log x_0$). Da ciò segue

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-nz_0} \right| \leq \sum_1^r |a_n e^{-nz_0}| = \sum_1^{\bar{n}} |a_n e^{-nz_0}| + \sum_{\bar{n}}^r |a_n e^{-nz_0}|$$

$$< A + \sum_{n=\bar{n}}^r n^s < A + r^{s+1}.$$

Quindi, per ogni $r > \bar{n}$ e $> A$, è

$$\left| \sum_1^r a_n e^{-nz_0} \right| < 2r^{s+1} < r^{s+2},$$

e la serie $\Sigma a_n e^{-nz}$ converge per ogni $R(z) > R(z_0)$ (n. 3). Converge, dunque,

$\Sigma a_n x^n$ per ogni $|x| < |x_0|$. Analogamente, facendo uso della proposizione del n. 2, si dimostra la convergenza di $\Sigma a_n x^n$ nel cerchio $|x| < |x_0|$, nell'ipotesi che, da un certo $\bar{n}$ in poi, sia $|a_n x_0^n| < e^{\sqrt{n}}$, ed in generale $|a_n x_0^n| < f(n)$, dove $f(n)$ soddisfa alle condizioni: $f(n) < f(n+1)$, e $nf(n) < e^{\eta n}$, per ogni η positivo [1].

§ 2.

Consideriamo due successioni distinte di esponenti

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$
$$\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n, \ldots$$

e supponiamo che le due serie di Dirichlet

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z}, \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n}$$

siano ambedue convergenti in un certo semipiano, rappresentando ivi la medesima funzione analitica. Possiamo anche supporre che sia $a_n \neq 0$, $a'_n \neq 0$. Come è noto, se h è un numero positivo appartenente al semipiano detto, è, in tutto il semipiano $R(z) > h$,

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = \Sigma s_n (e^{-\lambda_n z} - e^{-\lambda_{n+1} z})$$
$$\Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = \Sigma s'_n (e^{-\lambda'_n z} - e^{-\lambda'_{n+1} z}),$$

dove abbiamo posto $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $s'_n = a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n$. Nel semipiano $R(z) > h$ è, perciò,

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = z \Sigma s_n \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-tz}\, dt, \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = z \Sigma s'_n \int_{\lambda'_n}^{\lambda'_{n+1}} e^{-tz}\, dt,$$

ed anche, indicando con $\varphi(t)$ una funzione uguale ad s_1 in (λ_1, λ_2), λ_2 escluso; uguale ad s_2 in (λ_2, λ_3), λ_3 escluso; ecc.

$$\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = z \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt, \quad \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z} = z \int_{\lambda'_1}^{\infty} \varphi'(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

Dovendo essere, nel semipiano $R(z) > h$, $\Sigma a_n e^{-\lambda_n z} = \Sigma a'_n e^{-\lambda'_n z}$, dovrà essere, nello stesso semipiano,

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt = \int_{\lambda'_1}^{\infty} \varphi'(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

[1] Questo si può anche vedere direttamente osservando che è $a_n x^n = a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n$.

Supponiamo, ora, che sia $\lambda_1 \neq \lambda'_1$ e, per es., $\lambda_1 < \lambda'_1$. Ponendo $\varphi'(t) = 0$ nel segmento (λ_1, λ'_1), λ'_1 escluso, l'uguaglianza precedente potrà essere scritta

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt = \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi'(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

Da qui segue, per un noto teorema di Lerch [1], che $\varphi(t) - \varphi'(t)$ è una funzione ad integrale nullo, vale a dire è una funzione nulla in tutti i punti, eccettuati quelli di un insieme di misura nulla. In particolare, è $\varphi(t) = \varphi'(t)$ in tutti i punti in cui $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue.

Nel tratto (λ_1, ε), dove è $\varepsilon < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda'_1 \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue; dunque in esso è $\varphi(t) = \varphi'(t) = 0$, cioè $s_1 = a_1 = 0$. Ma a_1 si è supposto $\neq 0$; deve essere perciò $\lambda_1 = \lambda'_1$. In $(\lambda_1, \varepsilon_1)$, dove è $\varepsilon_1 < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda'_2 \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue e rispettivamente uguali a_1, a'_1; deve dunque essere $a_1 = a'_1$. Analogamente, per l'esistenza di punti di continuità per $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, in ogni tratto $(\lambda_r, \lambda_{r+1})$, $(\lambda'_r, \lambda'_{r+1})$, si conclude, avendo supposto $a_n \neq 0$, $a'_n \neq 0$,

$$\lambda_n = \lambda'_n, \quad a_n = a'_n.$$

Matematica. — *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Riprendo le notazioni della mia Nota: *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* [2] e mi propongo di dimostrare, sotto forma assoluta e semplicissima, il noto teorema di Gauss: *se due superficie sono applicabili esse hanno egual curvatura totale nei punti corrispondenti.*

Per tale dimostrazione occorre far uso di una nuova funzione R di una omografia vettoriale generica σ. Però delle numerose proprietà della omografia $R\sigma$, e che esporrò in altra occasione, basta far uso di quella che serve a definirla

$$(a) \qquad R\sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\sigma\mathbf{x}) \wedge (\sigma\mathbf{y})$$

($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sono vettori qualunque) e di quella che, dimostrandone l'esistenza, ne assegna anche la forma effettiva qualunque sia l'omogr. σ

$$(b) \qquad R\sigma = \mathrm{inv}_2\sigma - (\mathrm{inv}_1\sigma)\, K\sigma + K\sigma^2,$$

[1] Acta Mathematica, t. XXVII, pag. 345.

[2] Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2°.