ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Supponiamo, ora, che sia $\lambda_1 \neq \lambda'_1$ e, per es., $\lambda_1 < \lambda'_1$. Ponendo $\varphi'(t) = 0$ nel segmento (λ_1, λ'_1), λ'_1 escluso, l'uguaglianza precedente potrà essere scritta

$$\int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi(t)\, e^{-tz}\, dt = \int_{\lambda_1}^{\infty} \varphi'(t)\, e^{-tz}\, dt.$$

Da qui segue, per un noto teorema di Lerch (¹), che $\varphi(t) - \varphi'(t)$ è una funzione ad integrale nullo, vale a dire è una funzione nulla in tutti i punti, eccettuati quelli di un insieme di misura nulla. In particolare, è $\varphi(t) = \varphi'(t)$ in tutti i punti in cui $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue.

Nel tratto (λ_1, ε), dove è $\varepsilon < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda'_1 \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue; dunque in esso è $\varphi(t) = \varphi'(t) = 0$, cioè $s_1 = a_1 = 0$. Ma a_1 si è supposto $\neq 0$; deve essere perciò $\lambda_1 = \lambda'_1$. In $(\lambda_1, \varepsilon_1)$, dove è $\varepsilon_1 < \begin{cases} \lambda_2 \\ \lambda'_2 \end{cases}$, $\varphi(t)$ e $\varphi'(t)$ sono continue e rispettivamente uguali a_1, a'_1; deve dunque essere $a_1 = a'_1$. Analogamente, per l'esistenza di punti di continuità per $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, in ogni tratto $(\lambda_r, \lambda_{r+1})$, $(\lambda'_r, \lambda'_{r+1})$, si conclude, avendo supposto $a_n \neq 0$, $a'_n \neq 0$,

$$\lambda_n = \lambda'_n \quad , \quad a_n = a'_n .$$

Matematica. — *Una dimostrazione assoluta del teorema di Gauss relativo all'invariabilità della curvatura totale nella flessione*. Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Corrispondente T. Levi-Civita.

Riprendo le notazioni della mia Nota: *Alcune nuove espressioni assolute delle curvature in un punto di una superficie* (²) e mi propongo di dimostrare, sotto forma assoluta e semplicissima, il noto teorema di Gauss: *se due superficie sono applicabili esse hanno egual curvatura totale nei punti corrispondenti*.

Per tale dimostrazione occorre far uso di una nuova funzione R di una omografia vettoriale generica σ. Però delle numerose proprietà della omografia $R\sigma$, e che esporrò in altra occasione, basta far uso di quella che serve a definirla

$$(a) \qquad R\sigma(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = (\sigma\mathbf{x}) \wedge (\sigma\mathbf{y})$$

($\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ sono vettori qualunque) e di quella che, dimostrandone l'esistenza, ne assegna anche la forma effettiva qualunque sia l'omogr. σ

$$(b) \qquad R\sigma = \mathrm{inv}_2\sigma - (\mathrm{inv}_1\sigma)\, K\sigma + K\sigma^2,$$

(¹) Acta Mathematica, t. XXVII, pag. 345.
(²) Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2°.

ovvero, per σ invertibile,

$$(b') \qquad R\sigma = (\mathrm{inv}_3\sigma)\, K\sigma^{-1}.$$

Consideriamo ora la solita superficie Σ descritta dal punto P ed, essendo O un punto fisso, sia

$$Q = O + \mathbf{N}$$

il punto che descrive l'*indicatrice sferica* di Σ.

Se $\mathbf{u}$ è vettore parallelo ad $\mathbf{N}$, e ricordiamo che $\sigma\mathbf{N} = K\sigma\mathbf{N} = 0$, si ha da ($b$) $R\sigma\mathbf{u} = (\mathrm{inv}_2\sigma)\,\mathbf{u}$ [1]; quindi se dP, δP sono spostamenti infinitesimi (normali ad $\mathbf{N}$) di P, si ha da (a)

$$d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} = (\sigma dP) \wedge (\sigma\delta P) = R\sigma(dP \wedge \delta P) = (\mathrm{inv}_2\sigma)\, dP \wedge \delta P$$

e, in conseguenza,

$$(1) \qquad \frac{dP \wedge \delta P \times \mathbf{N}}{dQ \wedge \delta Q \times \mathbf{N}} = \frac{dP \wedge \delta P \times \mathbf{N}}{d\mathbf{N} \wedge \delta\mathbf{N} \times \mathbf{N}} = \frac{1}{\mathrm{inv}_2\sigma},$$

la quale, per essere $dP \wedge \delta P \times \mathbf{N}$, $dQ \wedge \delta Q \times \mathbf{N}$ elementi corrispondenti di area nei punti P, Q di Σ e della indicatrice, prova che: *il limite del rapporto tra un elemento di area di Σ in* P *e la corrispondente area dell'indicatrice sferica è l'inverso della curvatura totale nel punto* P.

Il punto P_1, funzione di P, descriva una superficie Σ_1, per la quale $\mathbf{N}_1$, σ_1 abbiano lo stesso significato di $\mathbf{N}$ e σ per Σ.

Se Σ è applicabile su Σ_1 (P in P_1) allora per uno spostamento d qualsiasi si ha

$$(dP)^2 = (dP_1)^2$$

ed esiste quindi una *isomeria-destra* λ funzione di P, cioè una omografia λ tale che

$$\lambda(K\lambda) = 1 \quad , \quad \mathrm{inv}_3\lambda = 1 \text{ [2]},$$

che trasforma dP in dP_1 ed $\mathbf{N}$ in $\mathbf{N}_1$,

$$(2) \qquad \lambda dP = dP_1 \qquad \lambda\mathbf{N} = \mathbf{N}_1 .$$

[1] Se $\mathbf{x}$ è vettore normale ad $\mathbf{N}$ si ha

$$R\sigma\mathbf{x} = 0$$

perchè posto $\mathbf{x} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{y}$ si ha da (a) $R\sigma\mathbf{x} = \sigma\mathbf{N} \wedge \sigma\mathbf{y} = 0$.

Applicando la (b) ad $\mathbf{x}$, e ricordando che $K\sigma = \sigma$, si ha

$$\sigma^2\mathbf{x} = \{(\mathrm{inv}_1\sigma)\,\sigma - \mathrm{inv}_2\sigma\}\,\mathbf{x}$$

che dà il quadrato di σ nel piano tangente a Σ in P.

[2] *L'Enseignement Mathématique*, loc. cit. Giova notare che le *isomerie vettoriali* danno sotto forma puramente geometrica e *assoluta* le ordinarie trasformazioni analitiche di variabile complessa nella sfera e nel piano.

Dalla seconda di queste si trae

$$dN_1 = (d\lambda)\,N + \lambda dN. \tag{3}$$

Essendo λ una isomeria-destra si ha da (b') $R\lambda = \lambda$ e quindi se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sono vettori

$$\lambda\mathbf{u} \wedge \lambda\mathbf{v} \times \lambda\mathbf{w} = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \times \lambda\mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times \mathbf{w}. \tag{c}$$

Da questa e da (3) si trae

$$\begin{aligned} dN_1 \wedge \delta N_1 \times N_1 &= dN \wedge \delta N \times N + \\ &+ \{(d\lambda)\,N \wedge (\delta\lambda)\,N + (d\lambda)\,N \wedge \lambda(\delta N) - (\delta\lambda)\,N \wedge \lambda(dN)\} \times \lambda N. \end{aligned} \tag{4}$$

Senza toglier nulla alla generalità si può supporre che Σ e Σ_1 siano disposte in modo che nel punto P (e in esso solo, almeno nei dintorni di P, ed escluso che Σ e Σ_1 siano eguali) si abbia $\lambda = 1$. In un punto di Σ, prossimo a P, il valore di λ è $1 + \varepsilon$, con ε omografia infinitesima. Ma $1 + \varepsilon$ è isomeria e quindi

$$(1 + \varepsilon)\,K(1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon)(1 + K\varepsilon) = 1,$$

ovvero, il che equivale,

$$\varepsilon + K\varepsilon = 2D\varepsilon = -\varepsilon K\varepsilon.$$

Dunque la dilatazione di ε, $D\varepsilon$, è infinitesima di ordine superiore ad ε. In conseguenza, ε si può ridurre, a meno di infinitesimi di ordine superiore, alla sua parte assiale, cioè si può porre

$$d\lambda = \mathbf{u}\wedge \quad , \quad d\lambda = \mathbf{v}\wedge,$$

con $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ vettori infinitesimi.

Ora, applicando note e semplici proprietà del doppio prodotto vettoriale e ricordando che dN e δN sono normali ad N (perchè $N^2 = 1$), il secondo termine del secondo membro della (4) assume subito, nel punto P nel quale $\lambda = 1$, il valore

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \times N + \mathbf{u} \times \delta N - \mathbf{v} \times dN$$

che è infinitesimo di ordine superiore a $dP \wedge \delta P \times N$, perchè $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, assi delle isomerie $1 + \varepsilon$, formano angoli infinitesimi con N, cioè angoli prossimi ad un retto con dN e δN, mentre può esser finito l'angolo di dP con δP.

Allora, osservando che dalla (c) si ha

$$dP_1 \wedge \delta P_1 \times N_1 = \lambda dP \wedge \lambda\delta P \times \lambda N = dP \wedge \delta P \times N,$$

divedendo i due membri della (4) per $dP_1 \wedge \delta P_1 \times N_1$ e $dP \wedge \delta P \times N$, e trascurando l'infinitesimo superiore del secondo membro, si ottiene

$$\frac{dN_1 \wedge \delta N_1 \times N_1}{dP_1 \wedge \delta P_1 \times N_1} = \frac{dN \wedge \delta N \times N}{dP \wedge \delta P \times N},$$

cioè, per la (1),

$$\mathrm{inv}_2 \sigma = \mathrm{inv}_2 \sigma_1$$

che dimostra il teorema di Gauss, perchè le curvature totali in P e P_1 sono appunto $\mathrm{inv}_2 \sigma$ e $\mathrm{inv}_2 \sigma_1$.

Fisica. — *Sulla presenza di torio nelle rocce.* Nota di G. A. Blanc, presentata dal Socio P. Blaserna.

In una precedente mia Nota [1] ho esposto come, dai risultati da me ottenuti nello studio dei prodotti radioattivi contenuti nell'atmosfera, io fossi stato condotto ad intraprendere delle ricerche allo scopo di mettere in evidenza la presenza del torio nei materiali costituenti il suolo del giardino circondante l'Istituto Fisico di Roma, e poi a fare una determinazione, se non altro approssimativa, della quantità di torio contenuta nell'unità di massa del suolo medesimo.

Ricorderò qui soltanto che coteste determinazioni, basate sulla misura della quantità di emanazione che per semplice diffusione si sprigiona da una determinata area del terreno, mi condussero alla conclusione che ogni grammo di questo terreno doveva contenere almeno gr. $1{,}45 \times 10^{-5}$ di torio.

Alla fine della suddetta Nota annunziavo essere in corso delle ricerche aventi per iscopo di determinare con un metodo assai più preciso le quantità di torio contenute in un certo numero di rocce di diversa natura e provenienza, e ciò a fine di stabilire se questo elemento dovesse essere considerato come un fattore importante o trascurabile della radioattività della crosta terrestre.

È da notarsi che, mentre si è sempre, fino ad ora, preso in considerazione il problema della presenza del radio nella crosta terrestre, e che sono state fatte ricerche accuratissime per determinare le quantità di radio contenute in un gran numero di rocce, nessuno, che io sappia, si è proposto il problema di stabilire quale parte abbia il torio nella radioattività del globo.

[1] Rendic. Acc. Lincei, XVII, pag. 101, 1908.