ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Abbiamo così questa nuova ed ultima soluzione: S_0 *è una superficie applicabile sopra una superficie di rotazione e, ridotto il suo elemento lineare alla forma*

$$ds_0^2 = du^2 + \cot^2 \sigma(u) dv^2,$$

il raggio delle sfere è

$$T = c - \int \cos\sigma(u) du \qquad (c = \cos t);$$

la relazione che lega i raggi principali di curvatura r_1, r_2 *di ciascuna falda* Σ, Σ_1 *dell'inviluppo di sfere è*

$$r_1 r_2 = \alpha (r_1 + r_2) + \beta,$$

ove

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= T - \frac{\sigma' \cos\sigma}{3\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''}, \\ \beta &= \frac{(2\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma'' \operatorname{sen}\sigma) \cos\sigma}{3\sigma'^2 \cot\sigma - \sigma''} - \alpha^2. \end{aligned} \right.$$

Riguardando come corrispondenti i due punti di contatto M ed M_1 di una medesima sfera con le due falde Σ e Σ_1 dell'inviluppo, *questi ultimi inviluppi di sfere hanno la proprietà caratteristica che sulle due falde* Σ *e* Σ_1 *si corrispondono le linee di curvatura, comunque deformando la superficie* S_0 *luogo dei centri* (§ 262).

Astronomia. — *Determinazione dell'andamento dell'orologio col telescopio zenitale.* Nota di A. ALESSIO, presentata dal Socio G. LORENZONI.

1. La diretta considerazione dei luoghi geometrici che nascono dalle osservazioni d'altezza fa conoscere in modo semplice ed evidente che la misura della *differenza* fra due altezze di stelle osservate nel I° verticale una ad E. ed una ad W. permette di determinare la posizione dello zenit sul parallelo della sfera celeste (e quindi il tempo locale) indipendentemente da errori, o differenze, sistematici, allo stesso modo che la misura della differenza fra due altezze di stelle osservate nel meridiano una a N. ed una a S. permette di determinare la posizione dello zenit sul meridiano (e quindi la latitudine, metodo di Horrebow-Talcott) indipendentemente da errori sistematici. L'effetto degli errori d'osservazione e degli errori delle assunte coordinate stellari dovrebbe *a priori* essere il medesimo sulla determinazione del tempo col telescopio zenitale (e con osservazioni prossime al

I° verticale) e sulla determinazione della latitudine col metodo di Talcott. Di fronte a questa conclusione, la quale trova conferma in un più profondo studio critico delle formule relative ai due casi, studiai ed esperimentai il metodo del quale dò qui sommaria notizia.

Il telescopio zenitale è pronto per l'applicazione del metodo quando sia messo sopra tal sostegno e così livellato che, facendo girare il cannocchiale intorno all'asse verticale, la bolla rimanga sempre dentro il campo di lettura: il nord istrumentale deve essere conosciuto con grossolana approssimazione.

Non occorre alcun calcolo preparatorio, non occorre conoscere le coordinate (α e δ) delle stelle da osservare: le formule risolutive sono più semplici di quelle di Mayer per l'istrumento dei passaggi.

Le osservazioni sono fatte nel modo seguente [il telescopio zenitale adoperato, del R. Istituto Idrografico, con un'apertura dell'obbiettivo di mm. 76, con la distanza focale di mm. 920, con un oculare da 68 ingrandimenti, ha tre fili orizzontali mobili e tre fili verticali fissi: sul tamburo del micrometro, ben fissato all'albero della vite, sono praticate due *tacche* in corrispondenza delle divisioni 0(100) e 50: girando il tamburo, il nasino di una molla opportunamente stabilita entrando nelle due tacche permette di fermare successivamente i fili mobili in posizioni distanziate di mezzo giro di micrometro, senza distrarre l'occhio dall'osservazione: il cannocchiale è puntato per l'altezza istrumentale 65°]: Iª serata: col campo oscuro si cerca una stella in prossimità del I° verticale E. (od W.); trovatala e rischiarato convenientemente il campo, con uno qualunque dei fili orizzontali e a partire da una posizione qualunque del micrometro si osserva, col tasto elettrico e cronografo, una serie di altezze (da 25 a 30) distanziate di mezzo giro di micrometro (alla latitudine di 45°, essendo il valore di mezzo giro di micrometro $= 30''$ circa, l'intervallo fra due successive osservazioni è di circa 3^s, sufficienti per girare il tamburo da una tacca all'altra e disporre il filo *davanti alla stella*): poi *si legge* la livella, si legge l'azimut istrumentale (ad un solo microscopio), si prende nota dell'istante in cui è cominciata l'osservazione, del filo col quale si è osservata la stella e della posizione iniziale del filo stesso e della grandezza della stella (apprezzata dall'osservatore); senza mai muovere il cannocchiale in altezza, si va quindi a cercare un'altra stella in prossimità del I° verticale W. (o E.) e si ripetono le medesime operazioni: si continua ad osservare alternativamente a levante ed a ponente; IIª serata (dopo n giorni, dove n può essere in particolare $= 1$): si riosservano le medesime stelle della Iª serata, preparando la puntata in azimut prima di ogni osservazione, col medesimo filo orizzontale, a partire dalla medesima posizione del filo ed anche in corrispondenza degli stessi punti del filo orizzontale (riferendosi, per ottener questo, ai fili verticali).

Ogni coppia di stelle osservate una a E. e l'altra ad W. nelle due serate dà un valore del desiderato nk, dove k rappresenta l'andamento diurno dell'orologio: i calcoli da eseguire per ogni coppia di stelle sono questi: per la Iª serata, *stella ad E.*: si fà la media t_1 degli istanti cronografici corrispondenti a 20 osservazioni successive centrali della serie; *stella ad W.*: si calcola come sopra il valore t_2: si corregge t_2 per la livella calcolando $t'_2 = t_2 \pm (L_2 - L_1)\,J$, dove $J = \sec\varphi \operatorname{cosec} Z_2$, Z_2 essendo l'angolo azimutale, dedotto dall'azimut istrumentale, che corrisponde alla stella osservata ad W.; per la IIª serata: si calcolano le medie O_1 ed O'_2 degli istanti cronografici di 20 osservazioni delle due stelle scelte in modo (con semplice ispezione al foglio cronografico) *da corrispondere alla medesima differenza fra le altezze* che ebbe luogo per t_1 e t'_2 nella Iª serata, ed in modo ancora che abbia *un valore assoluto non superiore a circa* 3^s *la differenza* $(t_1 - O_1) - (t_2 - O_2)$, la qual cosa è sempre possibile essendo di circa 3^s l'intervallo fra due successive osservazioni delle serie. Si ottiene finalmente il desiderato valore nk dalla formula

$$nk = (t_1 - O_1)\,a_1 + (t'_2 - O'_2)\,a_2$$

dove i coefficienti a_1 ed a_2 (che devono avere, come il coefficiente J, approssimazione analoga a quella dei coefficienti della formula di Mayer) hanno le espressioni

$$a_1 = \frac{\operatorname{sen} Z_1}{\operatorname{sen} Z_1 + \operatorname{sen} Z_2}\,, \quad a_2 = \frac{\operatorname{sen} Z_2}{\operatorname{sen} Z_1 + \operatorname{sen} Z_2} \quad (\text{all' incirca } a_1 = a_2 = \tfrac{1}{2}).$$

I diversi nk ottenuti dalle diverse coppie di stelle hanno sensibilmente lo stesso peso e si può farne la media semplice.

Si corregge poi, se del caso, la media degli nk ottenuti per tener conto delle variazioni delle ascensioni rette e declinazioni delle stelle avvenute fra la Iª e la IIª serata.

Per esigenze di brevità debbo rimandare ad altra prossima pubblicazione la presentazione dei dati d'osservazione e di calcolo raccolti in più serate: i risultati delle osservazioni compiute nei giorni 17-18-19 gennaio 1909, furono i seguenti:

17-18 gennaio	. . . . .	$k = +\,0^s{,}589 \pm 0^s{,}027$
17-19 "	. . . . .	$2k = +\,1{,}080 \pm 0{,}031$
18-19 "	. . . . .	$k = +\,0{,}491 \pm 0{,}025$.

Ognuno di questi nk fu dedotto da due determinazioni del genere descritto richiedenti ciascuna circa un'ora di tempo e comprendenti l'osservazione di 14 stelle (che si possono dire *orarie*). L'error medio dell' nk dedotto da una sola coppia è risultato $= \pm\,0^s{,}07$: questo è anche il valore dell'error medio complessivo degli istanti t od O osservati e corretti per la livella: e poichè di fronte ad esso è pressochè trascurabile l'errore d'osservazione delle altezze (l'error medio d'osservazione di un doppio passaggio pel filo orizzontale è risultato per tutte e tre le serate $= \pm 0^s,10$ e quindi per la media di 10 doppî passaggi $= \pm 0^s,03$), ne consegue che ogni osservazione fu affetta da un error medio di livella (o di egual natura) di $\pm 0^s,07$ che corrisponde a $\pm 0,4$ *parti di livella* (il valore di una parte della livella adoperata era $= 0^s,128$). È lecito pensare che il già molto soddisfacente grado di precisione raggiunto possa essere superato coll'impiego di una (o due) livella più sensibile, e con una maggior pratica da parte dell'osservatore (il quale, nel girare il tamburo del micrometro deve cercare di render minimi gli sforzi che tendono ad alterare la puntata in altezza del cannocchiale).

2. Sieno S_1 ed S_2 due stelle osservate agli istanti O_1 ed O_2 dell'orologio rispettivamente ad E. e ad W. a due determinate altezze h_1 ed h_2 *qualunque* (in particolare eguali) in due azimut prossimi al I° verticale ai quali corrispondono gli angoli azimutali Z_1 e Z_2 (contati da nord, da 0° a $+ 180°$): dall'osservazione si tragga soltanto la conoscenza della differenza (in particolare $= 0$) fra le due altezze h_1 ed h_2 o, ciò che è lo stesso, della differenza fra due qualunque altezze h' ed h'' le quali differiscano da h_1 ed h_2 di una medesima quantità C, piccola abbastanza per poter trascurare, in un prestabilito grado d'approssimazione, i termini di 2° ordine e di ordine superiore nella serie

$$ts = ts(h) + C\left(\frac{dts}{dh}\right)_h + \frac{C^2}{2}\left(\frac{d^2ts}{dh^2}\right)_h + \cdots$$

dove è ts il tempo siderale locale che corrisponde ad $h + C$.

Assunte due altezze $h' = h_1 - C$ ed $h'' = h_2 - C$ le quali soddisfino alla predetta condizione, si possono calcolare i tempi siderali ts_1 e ts_2 i quali corrispondono alla latitudine φ del luogo, e rispettivamente alle altezze h', h'' e alle coordinate $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2$ delle due stelle considerate; ed allora, detta K la correzione dell'orologio, ridotta ad un istante determinato, si possono scrivere le relazioni fondamentali

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} ts_1 + \dfrac{C}{\cos\varphi \operatorname{sen} Z_1} = O_1 + K \\[2ex] ts_2 - \dfrac{C}{\cos\varphi \operatorname{sen} Z_2} = O_2 + K \end{cases}$$

dalle quali, colla notazione già usata,

$$\text{(B)} \qquad K = (ts_1 - O_1)\, a_1 + (ts_2 - O_2)\, a_2$$

Adoperando il telescopio zenitale col procedimento descritto, il valore K è affetto dagli errori che provengono: *a*) dagli errori della latitudine introdotta nel calcolo di ts_1 e ts_2; *b*) dagli errori delle coordinate delle stelle S_1 ed S_2; *c*) dagli errori degli angoli azimutali; *d*) dagli errori d'osservazione e delle eventuali riduzioni delle osservazioni ad una presupposta differenza fra le altezze. Supponendo di poter sempre trascurare le quantità piccole d'ordine superiore al 1°, è facile stabilire le relazioni che vi sono fra i predetti errori ed i conseguenti errori del valore K; le ometto per brevità ed ometto, per la stessa ragione, di far presenti le correzioni che devono, nel caso generale, essere introdotte per ridurre le osservazioni alla presupposta differenza fra le altezze. Mi limito ad accennare che per poter usare nel calcolo valori soltanto approssimati degli angoli azimutali è necessario e sufficiente che sia piccolo abbastanza il valore della costante C.

Quando si voglia conoscere soltanto il valore $nk = K_n - K_0$, ossia determinare soltanto la *differenza* fra due successive correzioni dell'orologio comprendenti un numero intero di giorni siderali, è opportuno osservare per K_0 e per K_n le medesime stelle e all'incirca alle medesime altezze (per quanto consentono i mezzi istrumentali). Trascurando le variazioni, per l'intervallo di n giorni, delle ascensioni rette e delle declinazioni delle stelle, delle quali si può tener conto facilmente ed esattamente con analoghe correzioni, nel calcolo di K_n e di K_0 si può, per limitati valori di n, introdurre identici valori per ts_1 e ts_2 ed anche per Z_1 e Z_2: si vede allora che il valore nk è indipendente da ts_1 e ts_2 ossia che qualunque errore di questi rimane senza effetto nella differenza $K_n - K_0$: *per* ts_1 *e* ts_2 *è dunque lecito nel caso considerato assumere due valori qualunque arbitrari, non soddisfacenti ad alcuna condizione* e sul valore nk hanno effetto soltanto gli errori considerati ai capoversi *c*) e *d*); rimane così evidente la legittimità ed opportunità di aver stabilito, nel metodo proposto: 1° di osservare ciascuna stella con uno qualunque dei tre fili orizzontali, a partire da una posizione qualunque, assumendo, senza alcun calcolo preventivo e senza conoscere le coordinate esatte delle stelle osservate, per ts_1 e ts_2 rispettivamente i valori t_1 e t_2 (corretto per la livella) della I^a serata: così è $K_0 = 0$ e $(ts_2 - O_2) - (ts_1 - O_1) = 0$; 2° di scegliere la serie di altezze della II^a serata in modo che sia $(t_2 - O_2) - (t_1 - O_1)$, in valore assoluto minore di circa 3^s (tal limite, nel caso dell'istrumento da me adoperato, porta ad una esattezza esuberante, perchè l'errore degli angoli azimutali non può esser che di pochi *primi*).

Essendo sufficiente per l'esattezza dei risultati che si mantenga eguale nelle due serate la *differenza* fra le due altezze d'osservazione si può dire, in generale, che *non occorre tener conto*, con analoghe correzioni, *di nessuna circostanza la quale colpisca in modo sistematico o le due altezze di ciascuna coppia osservate nella medesima serata o le due altezze della medesima stella osservate nelle due serate*; se ne deduce che l'unica correzione che è necessario apportare, e nella quale sta probabilmente la maggior fonte degli errori d'osservazione propriamente detti, è quella dipendente dalla livella.

Richiamando alla mente i diversi errori d'osservazione e di calcolo che intervengono nelle determinazioni di tempo coll'istrumento dei passaggi e gli effetti ch'essi producono sul valore nk, si può verificare che il metodo proposto, più semplice di quello dei passaggi al meridiano per quanto riguarda la messa in stazione dell'istrumento e l'esecuzione delle osservazioni, più semplice per quanto riguarda i calcoli da eseguire, è anche teoricamente non meno esatto, di ciò si ebbe conferma sperimentale nelle osservazioni eseguite, di cui ho dato notizia.

Meccanica celeste. — *Sul valore di una particolare legge di forza centrale.* Nota di GIOVANNI ZAPPA, presentata dal Socio E. MILLOSEVICH.

In una Nota pubblicata nel primo numero del 26° volume dell'Astronomical Journal, F. L. Griffin vuol dimostrare che esiste una infinità (semplice) di forze oltre la Newtoniana che possono generare una data ellisse, e costruisce questa infinità; ma è facile vedere che, invece di dare una nuova soluzione al problema di Bertrand, già ben risoluto da Darboux e Halphen (vedi Comptes Rendus, vol. LXXXIV), dà una soluzione particolare di un altro problema più generale.

Dall'equazione

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2u}{d\vartheta^2}\right) \tag{1}$$

dove h è la costante delle aree e u è il reciproco del raggio vettore, il Griffin trova per l'ellisse facendo la sostituzione data da

$$u = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}$$

la

$$f = \frac{h^2 u^2}{p} \tag{2}$$

e poi con l'identità

$$u^2 = u^m u^{2-m} \tag{3}$$

sostituendovi

$$u^m = \frac{(1 + e\cos\vartheta)^m}{p^m} \tag{4}$$

esprime [1] la sua legge con

$$f = \mathrm{K}_m u^{2-m} (1 + e\cos\vartheta)^m \tag{5}$$

[1] La sostituzione di u^{2-m}, anzichè di u^m in funzione di ϑ conduce, per l'arbitrarietà di m, alla stessa legge (5).