ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Richiamando alla mente i diversi errori d'osservazione e di calcolo che intervengono nelle determinazioni di tempo coll'istrumento dei passaggi e gli effetti ch'essi producono sul valore nk, si può verificare che il metodo proposto, più semplice di quello dei passaggi al meridiano per quanto riguarda la messa in stazione dell'istrumento e l'esecuzione delle osservazioni, più semplice per quanto riguarda i calcoli da eseguire, è anche teoricamente non meno esatto, di ciò si ebbe conferma sperimentale nelle osservazioni eseguite, di cui ho dato notizia.

Meccanica celeste. — *Sul valore di una particolare legge di forza centrale.* Nota di Giovanni Zappa, presentata dal Socio E. Millosevich.

In una Nota pubblicata nel primo numero del 26° volume dell'Astronomical Journal, F. L. Griffin vuol dimostrare che esiste una infinità (semplice) di forze oltre la Newtoniana che possono generare una data ellisse, e costruisce questa infinità; ma è facile vedere che, invece di dare una nuova soluzione al problema di Bertrand, già ben risoluto da Darboux e Halphen (vedi Comptes Rendus, vol. LXXXIV), dà una soluzione particolare di un altro problema più generale.

Dall'equazione

$$f = h^2 u^2 \left(u + \frac{d^2 u}{d\vartheta^2}\right) \tag{1}$$

dove h è la costante delle aree e u è il reciproco del raggio vettore, il Griffin trova per l'ellisse facendo la sostituzione data da

$$u = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p}$$

la

$$f = \frac{h^2 u^2}{p} \tag{2}$$

e poi con l'identità

$$u^2 = u^m u^{2-m} \tag{3}$$

sostituendovi

$$u^m = \frac{(1 + e\cos\vartheta)^m}{p^m} \tag{4}$$

esprime [1] la sua legge con

$$f = K_m u^{2-m} (1 + e\cos\vartheta)^m \tag{5}$$

[1] La sostituzione di u^{2-m}, anzichè di u^m in funzione di ϑ conduce, per l'arbitrarietà di m, alla stessa legge (5).

dove

$$K_m = \frac{h^2}{p^{m+1}} \tag{6}$$

da cui per ogni valore di m si ha una legge diversa e con ciascuna di esse si ha l'ellisse di partenza. Di più ogni legge della infinità (5) genera oltre all'ellisse suddetta un'infinità di ellissi con la stessa eccentricità e gli assi maggiori sulla medesima linea.

Basta appena notare l'identità della (5) con la legge Newtoniana sull'ellisse di partenza (veggasi ad esempio sulla naturale indeterminatezza della forma della forza Appel, *Traité de Mécanique rationelle*, t. I, pag. 375 in fondo e 376); mentre per le altre ellissi occorre spendere qualche parola.

Le infinite ellissi date da ciascuna legge del sistema (5) hanno la stessa eccentricità e gli assi maggiori sulla stessa linea, dunque sono simili e similmente poste a meno di una rotazione intorno all'asse maggiore, e, per essere altresì confocali nel centro di forza, avranno i raggi vettori corrispondenti ad uno stesso ϑ proporzionali.

In luogo di u e ϑ prendiamo come variabile u e v dove u è sempre il reciproco del raggio vettore e v è il reciproco del raggio vettore dell'ellisse di partenza corrispondente allo stesso ϑ cioè

$$v = \frac{1 + e\cos\vartheta}{p} \tag{7}$$

allora possiamo porre per tutti i punti di ciascuna delle ellissi del sistema suddetto

$$\frac{u}{v} = K\,. \tag{8}$$

D'altra parte nelle nuove variabili la legge (5) è

$$f = K_m u^{2-m} v^m$$

e per la (8)

$$f = K_m v^2 \frac{v^{m-2}}{u^{m-2}} = \frac{K_m}{K^{m-2}} v^2 = \frac{K_m}{K^m} u^2$$

vale a dire anche sulle infinite ellissi la legge (5) coincide con la Newtoniana.

D'altra parte la (5) non può ridursi in tutto il campo alla forma, che vuole il corpo centrale nel fuoco, delle due generali date da Darboux e Halphen per la legge di forza centrale dipendente dalla sola posizione del mobile, cioè alla

$$\frac{\mu u^2}{(A\cos^2\vartheta + B\,\mathrm{sen}\,2\vartheta + F\,\mathrm{sen}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Cosicchè la legge (5) è una dello smisurato numero delle leggi di forza centrale che dànno l'ellissi come curve particolari; tali leggi possono venire studiate ad esempio conservando le variabili indipendenti u, v definite sopra; allora l'equazione (1) diventa

$$(9) \qquad f = h^2 u^2 \left[u - \frac{pv-1}{p} \frac{du}{dv} - \frac{d^2u}{dv^2} \frac{1}{p} \sqrt{e^2 - (pv-1)^2} \right]$$

dove p è il parametro dell'ellisse fondamentale ed e la sua eccentricità. Se vi poniamo $u = v$, la f diviene $\frac{h^2}{p} v^2$ come era da prevedersi, quindi tutte le espressioni analitiche di f funzioni delle coordinate del corpo mobile, riducentisi a Kv^2 per $u = v$ e soddisfacenti alle ordinarie condizioni per l'esistenza dell'integrale generale della (9), daranno forze centrali che per speciali condizioni iniziali producono l'ellisse di partenza.

La (5) è una specialissima di queste leggi, quella data da

$$(10) \qquad K_m \frac{v^m}{u^{m-2}}.$$

La (5) ammette altresì il sistema delle infinite ellissi simili e similmente poste, vale a dire deve il suo integrale generale condurre all'integrale particolare $u = lv$ dove l è una costante arbitraria e quindi rientra per questo nella categoria delle leggi che si riducono alla Newtoniana, non solo per $u = v$, ma anche per $u = lv$ cioè delle f definite dalla (9) che soddisfano la condizione

$$f_{u=lv} = l_1 v^2 .$$

Così però abbiamo accennato alle soluzioni particolari e non alle singolari, ma non importa insistervi; a noi basta aver mostrato il significato che va dato alla legge (5) e alle conclusioni del Griffin [1].

Il sistema delle ellissi della (5) è uno specialissimo sistema delle ellissi che possono venir date dalla legge Newtoniana, quelle definite dalle condizioni seguenti, supposte nulle le perturbazioni,

$$\frac{h_1^2 h_2}{(M_1 + M_2)^2} = \text{cost.} \qquad \alpha = \text{cost.} \qquad \frac{h_1^2}{M_1 + M_2} = s$$

[1] « It is commonly, though erroneously, stated that, if a planet describe an ellipse as a central orbit with the sun at a focus, the law must be that of Newton ecc. ». Il Griffin estende anche il modo di formazioni di nuove leggi a una orbita qualunque descritta come orbita centrale. Ora sulla curva data le leggi così ottenute si equivalgono, mentre fuori della curva descritta dal mobile nessuna cognizione abbiamo della forza che vi domina. Solo in conseguenza di determinate ipotesi, della definizione del campo, potremo ammettere una legge determinata in questo campo, fuori della curva realmente descritta dal mobile.

dove h_1 è la costante delle aree, h_2 quella della forza viva e α quella data dall'integrazione di

$$d\vartheta = \frac{du}{\sqrt{A^2 - u^2}},$$

M_1 è la massa del corpo centrale, M_2 quella del mobile e s può assumere qualunque valore reale positivo. Così si ha la rappresentazione geometrica del sistema della (5), ma non si riproduce la legge del tempo, giacchè se riduciamo la (5) all'espressione Newtoniana Ku^2, troviamo che il K per la forma dei coefficienti della (5) e precisamente per il parametro elevato a $-(m+1)$, varia da ellisse a ellisse: Riprendiamo la (5) e otteniamo, se passiamo dall'ellisse di parametro p, e costante delle aree h, e raggio vettore v a un'altra di raggio vettore u con $u = lv$

$$f = \frac{h^2}{p^{m+1}} \frac{p^m v^m}{u^{m-2}} = \frac{h^2}{p} \frac{u^2}{l^m}.$$

Ora $\frac{h^2}{p}$ è costante su tutte le ellissi e corrisponde al fattore di $\frac{1}{r^2}$ nella forma Newtoniana della legge sulla prima di esse; mentre l^m varia da ellisse a ellisse.

Ne segue che il moto sul sistema delle ellissi della (5), che non contiene le masse, non soddisfa alla terza legge di Keplero, neppure supposte le masse dei mobili sempre uguali.

In realtà sull'ellisse di raggio vettore v e semiasse maggiore a è

$$T = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{h} \tag{12}$$

mentre su un'altra ellisse definita da $u = lv$ è

$$T_l = \frac{2\pi A^{\frac{3}{2}} \sqrt{p}}{h} \sqrt{l^m}. \tag{13}$$

Per serbare inviolata la terza legge di Keplero basterebbe porre nella forma (8) K uguale a una costante moltiplicata per la somma delle masse cioè nella forma (5)

$$K_m = \frac{h^2}{p\, P^m} (M + M_l)$$

dove p è il parametro dell'ellisse di partenza e P di quella che si considera,

mentre per avere il movimento della (5) sull'ellisse con la legge Newtoniana, occorre introdurre anche un'ipotesi sulla massa, porre cioè

$$\frac{M}{M_l} = l^m$$

in cui m è l' m della (5), M e M_l sono rispettivamente la somma delle masse del corpo centrale con il mobile sull'ellisse fondamentale, o con il mobile sull'ellisse legata a quella della relazione

$$u = l v .$$

Di conseguenza le costanti delle aree e quelle delle forze vive vengono ad essere legate dalle relazioni

$$\frac{h_1}{h_{1l}} = \sqrt{l^{m+1}} \qquad \frac{h_2}{h_{2l}} = l^{m-1} .$$

Dalla (12) e dalla (13) si ha che la (5), quando m sia positivo, produce una diminuzione della durata di rivoluzione rispetto a quella data dalla legge di Keplero, quando sieno le masse dei mobili uguali, tanto più grande, quanto maggiore è la distanza del mobile dal centro di forza, mentre quando m sia negativo produce un aumento parimenti tanto più grande, quanto maggiore è la distanza del mobile dal centro di forza.

Di qualche interesse è una particolare delle (5), quella data da

$$m = 3$$

cioè la

$$f = \frac{h^2}{p^4} \frac{(1 + e \cos \vartheta)^3}{u} . \tag{14}$$

Per essa sulle ellissi si ha

$$T = T_l$$

cioè la durata di rivoluzione è indipendente dalla distanza media del mobile dal centro di forza: Di più

$$\frac{h}{h_l} = l^2$$

e si ha il teorema: Due corpi mossi dalla (14) uno sull'ellisse v e uno sulla $u = lv$ (a parte sempre le azioni mutue) o sono perennemente in congiunzione (in anomalia vera) rispetto al centro di forza o non possono esser mai in tale posizione.

Di fatti se definiamo la posizione dei mobili sulle rispettive ellissi con l'area S_0, S_l che ha descritto il raggio vettore a partire, ad esempio, dal perielio, allora se per $t = t_0$ $S = S_0$ per uno e $S = S_{0l}$ per l'altro, per un t qualunque sarà

(15) $$S = S_0 + h(t - t_0)$$

per l'uno e

(16) $$S_l = S_{0l} + h_l(t - t_0)$$

per l'altro.

Ora se per un tempo t le anomalie vere dei due corpi ϑ e ϑ_l sono uguali deve per lo stesso istante in causa della similitudine delle ellissi essere

$$S = l^2 S_l$$

e poichè

$$h = h_l l^2$$

se non è

$$S_0 = l^2 S_{0l}$$

cioè se non è

$$\vartheta_0 = \vartheta_{0l}$$

non potrà per nessun t essere

$$S = l^2 S_l;$$

mentre se è

$$S_0 = l^2 S_{0l}$$

per qualunque t sarà

$$S = l^2 S_l$$

cioè

$$\vartheta = \vartheta_l.$$

Dalle (15) e (16) segue ancora che l'area $\bar{S}$ del settore di una delle due ellissi racchiuso dai raggi vettori corrispondenti alle due anomalie vere dei due mobili è costante, cosicchè la variazione dell'angolo $\bar{\vartheta}$ racchiuso fra questi due vettori dato da

$$\vartheta = \frac{\bar{S}}{\bar{r}^2}$$

in cui $\bar{r}$ è un valore intermedio del raggio vettore, è dell'ordine dell'eccentricità e quindi, per eccentricità ed inclinazione dei due piani piccole, se i due mobili sono stati una volta in opposizione rispetto al centro di forza restano perennemente prossimi a quella posizione; e quando nel punto centrale di forza vi fosse un corpo di una certa luce o occultante da uno dei due mobili una certa area, essi potrebbero restar così perennemente invisibilli l'uno all'altro.