ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 4 aprile 1909.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul significato geometrico del secondo parametro differenziale di una funzione sopra una superficie qualunque.* Nota del Corrispondente P. PIZZETTI.

Nel fascicolo 4° del presente volume di questi Rendiconti ho dato uno sviluppo in serie atto ad esprimere la media aritmetica dei valori che una funzione dei punti dello spazio ordinario assume alla superficie di una sfera. Un calcolo analogo conduce ad esprimere la media dei valori che una funzione dei punti del piano assume sopra una circonferenza.

Detto V_0 il valore della funzione V in un punto O del piano, M la media aritmetica dei valori che la funzione stessa assume nei punti della periferia di cerchio di raggio R e centro O, si ha:

$$(1)\quad \begin{aligned} M = V_0 &+ \frac{R^2}{2^2}(\Delta_2 V)_0 + \frac{R^4}{2^2.4^2}(\Delta_4 V)_0 + \cdots \\ &+ \frac{R^{2n-2}}{2^2.4^2\ldots(2n-2)^2}(\Delta_{2n-2}V)_0 + \frac{R^{2n}}{2^2.4^2\ldots(2n)^2}(\Delta_{2n}V)_m . \end{aligned}$$

Con $(\Delta_{2r}V)_0$ è indicato il valore che $\Delta_{2r}V$ assume nel punto O; con $(\Delta_{2n}V)_m$ un valore compreso fra il massimo e il minimo di quelli che $\Delta_{2n}V$

assume nell'area circolare considerata. Stimo inutile riprodurre il calcolo (del tutto analogo a quello della mia precedente Nota) che conduce alla formola (1).

Se dividiamo la (1) per R^2 e facciamo poi tendere R a zero, abbiamo

$$(2) \qquad \lim_{R=0} \frac{4(M - V_0)}{R^2} = (\Delta_2 V)_0 .$$

Ora io mi propongo di dimostrare che questa formola può essere assunta come definizione del secondo parametro differenziale di una funzione dei punti di una *superficie qualunque* (salva qualche limitazione intorno al modo di variare della curvatura della superficie), ove naturalmente s'intenda che M sia la media dei valori che la V assume sopra una circonferenza geodetica di centro O e raggio R.

2. Non sarebbe difficile arrivare a questo risultato, partendo dallo sviluppo di Taylor applicato alla funzione V lungo un arco di geodetica uscente da O, e integrando poscia l'espressione così ottenuta lungo la circonferenza geodetica di raggio R. Ma per tenere questa via, occorre ammettere l'esistenza delle derivate 3^e della V rispetto alle variabili che si assumono come coordinate sulla superficie. Io intendo invece stabilire la (2) limitandomi alla ipotesi che esistano e siano integrabili le derivate 2^e della V in un intorno convenientemente piccolo del punto O.

3. Supporremo riferiti i punti della superficie ad un sistema di coordinate polari geodetiche u e θ, con polo in O. Sia

$$ds^2 = du^2 + G\, d\theta^2$$

il quadrato dell'elemento lineare. Riguardo alla superficie faremo le ipotesi seguenti:

a) che in un intorno finito del punto O la curvatura assoluta sia finita;

b) che, detto K_0 il valore della curvatura in O, e K quello in un punto M a distanza geodetica u da O, si abbia

$$(3) \qquad |K - K_0| < hu$$

dove h è una costante finita;

c) che K_1 sia il valore massimo, e K_2 il minimo della curvatura assoluta nella regione di superficie che si considera; intendendo che in luogo di K_2 si ponga *zero*, se la curvatura è sempre positiva o nulla, e si ponga, invece, *zero* in luogo di K_1, se essa è sempre negativa o nulla.

Supporrò, per ora, K_0 positiva.

4. Mi varrò di alcune disuguaglianze stabilite nelle mie Memorie: *Intorno al grado di approssimazione che si raggiunge nel risolvere i*

triangoli geodetici sopra una superficie qualunque [1]; e *Paragone fra gli angoli di due triangoli geodetici di eguali lati* [2].

Tenute le notazioni stabilite nel paragrafo precedente, si ha

$$a)\quad u\cos(u\sqrt{K_1}) < \sqrt{G} < u\cos\mathrm{ip}\,(u\sqrt{-K_2})\,.$$

b) Osservando che, per la superficie a curvatura costante, K_0 il rapporto $\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}$ è espresso da $\sqrt{K_0}\,.\,\mathrm{cotg}(u\sqrt{K_0})$ mentre $\sqrt{G}$ è espresso da $\dfrac{1}{\sqrt{K_0}}\,\mathrm{sen}\,(u\sqrt{K_0})$, dalla formola (16) della citata Memoria di Torino risulta che

$$\sqrt{K_0}\,.\,\mathrm{cotg}(u\sqrt{K_0}) - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{G}\,.\,\mathrm{sen}\,(u\sqrt{K_0})}\int_0^u (K_x - K_0)\sqrt{G_x}\,\mathrm{sen}\,(x\sqrt{K_0})\,dx$$

dove K_x e G_x sono K e G ove alla lettera u si immagini sostituita la x. Ora abbiamo

$$\sqrt{G_x} < x\,.\cos\mathrm{ip}\,(x\sqrt{-K_2}) < x\,.\cos\mathrm{ip}\,(u\sqrt{-K_2})$$

$$|K_x - K_0| < hx \quad ; \quad \mathrm{sen}\,(x\sqrt{K_0}) < x\sqrt{K_0}$$

$$\sqrt{G}\,.\,\mathrm{sen}\,(u\sqrt{K_0}) > u^2\,.\cos^2(u\sqrt{K_1})\,.\sqrt{K_0}\,.$$

Quindi

$$\left|\sqrt{K_0}\,.\,\mathrm{cotg}(u\sqrt{K_0}) - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right| < \frac{hu^2}{4}\,\frac{\cos\mathrm{ip}\,(u\sqrt{-K_2})}{\cos^2(u\sqrt{K_1})}\,.$$

c) Dalla formola (7) della citata Memoria di Torino deduciamo, colle presenti notazioni:

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K_0}}\,\mathrm{sen}\,(u\sqrt{K_0}) + \frac{1}{\sqrt{K_0}}\int_0^u \sqrt{G_x}\,(K_0 - K_x)\,\mathrm{sen}\,(u - x)\sqrt{K_0}\,.\,dx\,,$$

e quindi, in modo analogo al precedente,

$$\left|\sqrt{G} - \frac{1}{\sqrt{K_0}}\,\mathrm{sen}\,(u\sqrt{K_0})\right| < \frac{hu^4}{12}\cos\mathrm{ip}\,(u\sqrt{-K_2}).$$

[1] Memorie R. Accad. di Torino, ser. II, vol. LVII, 1906. Si osservi che in quella Memoria mi sono limitato a considerare superficie a curvatura *positiva*; le formole ivi contenute sono quindi meno generali di quelle comprese nella successiva Nota, nella quale ho generalizzata la ipotesi sul segno della curvatura.

[2] Rendiconti Lincei, ser. 5ª, vol. XVI, 1907, pp. 149-155.

d) Indichiamo con s_u la lunghezza di tutta la circonferenza geodetica di raggio u: avremo:

$$s_u = \int_0^{2\pi} \sqrt{G} \, . \, d\theta$$

e quindi, dalla precedente diseguaglianza:

$$\left| s_u - \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen}(u\sqrt{K_0}) \right| < \frac{\pi h u^4}{6} \cos \operatorname{ip}(u\sqrt{-K_2}).$$

Supposto che la porzione di superficie che si vuol considerare sia tutta contenuta dentro il cerchio geodetico di raggio R′ e centro O, potremo nelle precedenti diseguaglianze attribuire a $\cos \operatorname{ip}(u\sqrt{-K_2})$ il valore massimo $\cos \operatorname{ip}(R'\sqrt{-K_2})$ e a $\cos(u\sqrt{K_1})$ il minimo valore $\cos(R'\sqrt{K_1})$. (Supponiamo ben inteso $R'\sqrt{K_1} < \frac{\pi}{2}$). Le dette diseguaglianze, se poniamo

$$c = \cos(R'\sqrt{K_1}) \quad , \quad c' = \cos \operatorname{ip}(R'\sqrt{-K_2}) \, ,$$

diventano così:

$$(\alpha) \qquad uc < \sqrt{G} < uc' \, ,$$

$$(\beta) \qquad \left| \sqrt{K_0} \operatorname{cotg}(u\sqrt{K_0}) - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right| < \frac{h u^2}{4} \frac{c'}{c^2} \, ,$$

$$(\gamma) \qquad \left| \sqrt{G} - \frac{1}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen}(u\sqrt{K_0}) \right| < \frac{h u^4}{12} c' \, ,$$

$$(\delta) \qquad \left| s_u - \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen}(u\sqrt{K_0}) \right| < \frac{\pi h u^4}{6} c' .$$

Se la curvatura della superficie, nella regione che si considera, non è mai negativa, dovrà porsi $c' = 1$; se essa invece non è mai positiva, si porrà $c = 1$.

5. Queste cose premesse, facciamo uso della formola di Green generalizzata [1]

$$(4) \qquad 2\pi V_0 = \int_s \left(V \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial V}{\partial n} \right) ds + \int_\Omega (V \, . \, \Delta_2 \psi - \psi \, . \, \Delta_2 V) \, d\Omega$$

dove V è una funzione finita in tutti i punti dell'area limitata Ω di una superficie regolare, e ammette, entro questa regione, le derivate 1e e 2e finite e integrabili; ψ è una funzione generalmente finita, salvo nel punto O,

[1] Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque*. Annali di matematica, ser. II, t. 1, 1867.

ove essa diventa infinita come $\log \frac{1}{u}$. Con s è indicato l'arco della linea contorno dell'area Ω, con V_0 il valore della V nel punto O.

Assumeremo per la ψ la forma

$$\psi = \log \operatorname{cotg}\left(\frac{u}{2}\sqrt{K_0}\right),$$

per area Ω quella limitata da una circonferenza geodetica di centro O e raggio geodetico $u = R$. Avremo per la funzione ψ il secondo parametro differenziale espresso da

$$\begin{aligned}\Delta_2\psi &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\frac{\partial\psi}{\partial u}\right) = \\ &= \frac{\sqrt{K_0}}{\operatorname{sen}(u\sqrt{K_0})}\left\{\sqrt{K_0}\operatorname{cotg}(u\sqrt{K_0}) - \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right\}.\end{aligned} \tag{5}$$

Indichiamo con s lo sviluppo della circonferenza geodetica di raggio R, con M la media dei valori che la funzione V assume nei punti di questa circonferenza; ossia poniamo

$$M = \frac{1}{s}\int_s V . ds .$$

Dividendo la (4) per 2π e sottraendo M dalle due parti, scriveremo

$$V_0 - M = A - B + C \tag{6}$$

dove

$$A = \frac{1}{2\pi}\int_s V\frac{\partial\psi}{\partial n}ds - \frac{1}{s}\int_s V . ds,$$

$$B = \frac{1}{2\pi}\int_s \psi\frac{\partial V}{\partial n}ds + \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \psi . \Delta_2 V . d\Omega ,$$

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_\Omega V . \Delta_2\psi . d\Omega .$$

Esaminiamo dapprima il termine A. Abbiamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = -\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\sqrt{K_0}}{\operatorname{sen}(u\sqrt{K_0})} .$$

Quindi

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{K_0}}{2\pi . \operatorname{sen}(R\sqrt{K_0})}\int_s V . ds - \frac{1}{s}\int_s V . ds = \\ &= M\left\{s - \frac{2\pi}{\sqrt{K_0}}\operatorname{sen}(R\sqrt{K_0})\right\}\frac{\sqrt{K_0}}{2\pi \operatorname{sen}(R\sqrt{K_0})} .\end{aligned}$$

Tenuto conto della diseguaglianza (δ), ove si porrà R invece di u, ed osservando che

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{sen}(R\sqrt{K_0}) > R\sqrt{K_0}\cos(R\sqrt{K_0}) > R\sqrt{K_0}\,c,$$

abbiamo

$$(\gamma) \qquad |A| < \frac{hMR^3}{12}\frac{c'}{c}.$$

Le costanti c, c' hanno il significato indicato alla fine del § 4.

Passiamo a considerare il termine C. Ricordando l'espressione (5) di $\Delta_2\psi$ e la diseguaglianza (β) abbiamo

$$|\Delta_2\psi| < \frac{\sqrt{K_0}}{\operatorname{sen}(u\sqrt{K_0})}\frac{hu^2c'}{4c^2}$$

e per la (α)

$$\sqrt{G}\,|\Delta_2\psi| < \frac{\sqrt{K_0}}{\operatorname{sen}(u\sqrt{K_0})}\frac{hu^3c'^2}{4c^2}$$

ed anche per la (7) ove si ponga u in luogo di R,

$$\text{(9)} \qquad \sqrt{G}\,|\Delta_2\psi| < \frac{hu^2c'^2}{4c^3}.$$

D'altra parte, ponendo per $d\Omega$ la sua nota espressione, avremo

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R V.\Delta_2\psi.\sqrt{G}\,du.$$

Quindi, detto V_m il massimo valore assoluto di V,

$$\text{(10)} \qquad |C| < \frac{V_m}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R |\Delta_2\psi|\sqrt{G}\,.\,du < \frac{hR^3c'^2}{12\,.\,c^3}V_m.$$

Veniamo finalmente al termine B. Poichè

$$\int_s \frac{\partial V}{\partial n}\,ds = -\int_\Omega \Delta_2 V.\,d\Omega,$$

avremo

$$B = -\frac{1}{2\pi}\log\operatorname{cotg}\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right)\int_\Omega \Delta_2 V.\,d\Omega -$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_\Omega \log\operatorname{cotg}\left(\frac{u}{2}\sqrt{K_0}\right).\,\Delta_2 V.\,d\Omega =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \left\{\log\operatorname{tang}\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) - \log\operatorname{tang}\left(\frac{u}{2}\sqrt{K_0}\right)\right\}\Delta_2 V.\sqrt{G}\,.\,du.$$

Poniamo per $\sqrt{G}$ l'espressione

$$\sqrt{G} = \frac{1}{\sqrt{K_0}} \operatorname{sen}(u\sqrt{K_0}) + \varepsilon$$

dove

$$|\varepsilon| < \frac{hu^4}{12} c',$$

ed osserviamo che, la quantità che moltiplica $\Delta_2 V$ sotto il segno integrale rimanendo positiva nell'intervallo di integrazione, è lecito portare fuori dal segno integrale la stessa $\Delta_2 V$ attribuendole un valore medio che indicheremo con $(\Delta_2 V)_m$. Avremo così

$$\text{(11)} \quad \begin{aligned} B = \frac{(\Delta_2 V)_m}{\sqrt{K_0}} \int_0^R \Big\{ \log \operatorname{tang}\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) - \\ - \log \operatorname{tang}\left(\frac{u}{2}\sqrt{K_0}\right) \Big\} \operatorname{sen}(u\sqrt{K_0}) \,.\, du + \eta \end{aligned}$$

dove

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned} |\eta| < \frac{h \,.\, c'(\Delta_2 V)_{max}}{12} \int_0^R \Big\{ \log \operatorname{tang}\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) - \\ - \log \operatorname{tang}\left(\frac{u}{2}\sqrt{K_0}\right) \Big\} u^4 \,.\, du \,. \end{aligned}$$

Ora, colla integrazione per parti, è facile verificare che l'integrale che figura nella formola (11) è eguale a

$$-\frac{2}{\sqrt{K_0}} \log \cos\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right)$$

e quello che figura nella (12) può scriversi

$$\frac{\sqrt{K_0}}{5} \int_0^R \frac{u^5 \,.\, du}{\operatorname{sen}(u\sqrt{K_0})} < \frac{1}{5\cos(R\sqrt{K_0})} \int_0^R u^4 \,.\, du < \frac{R^5}{25 \,.\, \cos(R\sqrt{K_0})} \,.$$

Sicchè finalmente

$$\text{(13)} \quad B = -\frac{2}{K_0} (\Delta_2 V)_m \log \cos\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) + NR^5$$

dove N è una quantità che rimane finita per ogni valore R non superiore a un certo limite finito.

Dalle (6) (8) (10) (13) abbiamo dunque

$$\text{(14)} \quad V_0 - M = \frac{2}{K_0} (\Delta_2 V)_m \log \cos\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) + PR^3$$

dove P rimane finita per ogni valore di R non superiore a un certo limite finito. Il calcolo precedente dimostra che questo limite superiore R′ è determinato dalla condizione che sia $R'\sqrt{K_1} < \frac{\pi}{2}$, essendo K_1 il massimo valore della curvatura assoluta.

Si ha d'altra parte

$$\lim_{R=0} \frac{1}{R^2} \log\cos\left(\frac{R}{2}\sqrt{K_0}\right) = -\frac{K_0}{8}.$$

Quindi dalla (14) risulta la formola che si voleva dimostrare:

$$\lim_{R=\infty} \frac{M - V_0}{R^2} = \frac{1}{4}(\varDelta_2 V)_0$$

nell'ipotesi che il $\varDelta_2 V$ varî con continuità in prossimità del punto considerato O.

5. Nel calcolo precedente è supposto che la curvatura assoluta K_0 della superficie in O sia positiva. Se fosse negativa, il calcolo si modifica in modo ovvio. Bisogna allora prendere come funzione ψ, nella formola di Green (4) la

$$\psi = \log\operatorname{cotg}\operatorname{ip}\left(\frac{u}{2}\sqrt{-K_0}\right).$$

Alla formola (14) risulta allora sostituita la

$$V_0 - M = \frac{2}{K_0}(\varDelta_2 V)_m \log\cos\operatorname{ip}\left(\frac{R}{2}\sqrt{-K_0}\right) + PR^3.$$

E poichè

$$\lim_{R=0} \frac{\log\cos\operatorname{ip}\left(\frac{R}{2}\sqrt{-K_0}\right)}{R^2} = \frac{-K_0}{8},$$

la precedente conclusione rimane inalterata.

Se fosse finalmente $K_0 = 0$, bisognerebbe assumere

$$\psi = \log\frac{1}{u}.$$