ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 18 aprile 1909.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota del Socio E. Bertini.

La notevole ed elegante Nota di Severi: *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche* (Atti della R. Accad. delle Sc. di Torino, 1905) contiene una dimostrazione algebrica del teorema, trovato dal König per via trascendente, che è una estensione all'iperspazio del celebre teorema di Noether $Af + B\varphi$.

In questa ingegnosa dimostrazione si presentano due questioni la cui soluzione è oggetto della presente Nota. Precisamente si dimostra nel n. 2, che il teorema del n. 6 della Nota di Severi relativo ad un solo punto si può estendere ad un numero qualunque (finito) di punti e, nel n. 3, che il limite inferiore dato nel n. 8 di detta Nota, per la dimensione di un certo sistema lineare staccato da un modulo, è veramente questa dimensione. Le due proposizioni, che così si ottengono e che hanno interesse per sè, rendono poi la suddetta dimostrazione del teorema di König più semplice e diretta, ed anzi tale da potersi dire che è proprio una estensione del procedimento omai notissimo con cui si dimostra il teorema $Af + B\varphi$ (1). In vero, per

(1) Cfr. Severi, *Appunti di Geometria algebrica* (R. Accad. di sc. lett. ed arti in Padova, 1908).

questo si adopera il teorema che esprime la dimensione dello spazio congiungente due dati, noto il loro spazio d'intersezione, e per quello, come ora si vedrà (n. 3), si adopera il teorema più generale che trovasi nei nn. 19-20, Cap. 1°, del mio libro: *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*. Soltanto occorre aggiungere la proposizione del n. 2 per stabilire una proprietà che nel caso di due forme si verifica senz'altro (Vedasi Osservazione 3ª del n. 6 della Nota di Severi).

Osserverò anche che l'uso fatto nel n. 18, Cap. 11° del mio libro e l'uso analogo che si fa qui del citato teorema dei nn. 19-20, Cap. 1°, prova l'utilità e facilità di applicazione del teorema stesso.

1. Anzitutto avvertiamo che, se $F_1, \dots, F_h$ [1] sono forme qualunque ad $r+1$ variabili degli ordini $n_1, \dots, n_h$, ogni forma F dell'ordine n che appartiene al loro modulo $(F_1 \dots F_h)$ ossia che è esprimibile in questo modo:

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h ,$$

si può anche esprimere in questi altri infiniti modi:

$$F = (A_1 + \sum_j p_{1j} F_j) F_1 + \cdots + (A_h + \sum_j p_{hj} F_j) F_h ,$$

ove le h^2 forme p_{ij} (degli ordini $n - n_i - n_j$) sieno gli elementi di un determinante emisimmetrico ($p_{ii} = 0$, $p_{ij} = -p_{ji}$) e del resto arbitrarie.

La cosa è evidente e può completarsi coll'osservazione (che viene subito dal teorema del n. 5 della Nota di Severi, ma che però nella presente Nota non ha applicazione) che quelle sono tutte le espressioni possibili della F per combinazioni lineari delle $F_1 \dots F_h$, quando queste si seghino in una varietà ad $r - h$ dimensioni.

2. Dimostriamo ora il teorema: *Se $h (\leq r)$ ipersuperficie $F_1, \dots, F_h$ di S_r, degli ordini $n_1, \dots, n_h$ si segano in una varietà qualsiasi Φ (anche di diverse dimensioni e con parti multiple) e si ha un numero qualunque (finito) di punti P di Φ in ciascuno dei quali le $F_1, \dots, F_h$ presentino il caso semplice* [2] *ed abbiano le molteplicità $s_1, \dots, s_h$ (almeno), ogni F del modulo $(F_1 \dots F_h)$ la quale sia di ordine n abbastanza elevato ed abbia in ciascun punto P la moltiplicità s (almeno), si può rappresentare così:*

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h ,$$

[1] Coi simboli $F, F_1, \dots$ indichiamo indifferentemente forme algebriche o ipersuperficie di S_r (rappresentate da quelle forme eguagliate a zero).

[2] Come è facile vedere, questa condizione trae con sè che i punti P sieno di varietà di Φ ad $r - h$ dimensioni.

ove $A_1, \dots, A_h$ *hanno in ciascun punto* P *le moltiplicità* $s-s_1, \dots, s-s_h$ (*almeno*) [1].

Cominciamo dal considerare uno dei punti P e cerchiamo di soddisfare al teorema dapprima in questo solo punto. Allora vale la dimostrazione del n. 6 della Nota di Severi, che qui riproduciamo per modificarla in un punto che ha interesse per il seguito.

Il teorema è evidente se F passa per il punto P colla minima tra le moltiplicità $s_1, \dots, s_h$ e quindi si può dimostrare per induzione passando da $s-1$ ad s. Se F appartiene al modulo $(F_1 \dots F_h)$ ed ha in P moltiplicità s si potrà quindi scrivere

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h ,$$

ove le A_i, per il teorema ammesso per $s-1$, hanno in P moltiplicità $s-s_i-1$ (almeno). Preso P come origine delle coordinate ($x_0 = 1$, $x_1 = \cdots = x_r = 0$) si avrà, ordinando nelle potenze decrescenti di x_0,

$$F = \Phi x_0^{n-s} + \cdots , \quad F_i = \Phi_i x_0^{n_i - s_i} + \cdots , \quad A_i = a_i x_0^{n-n_i-s+s_i+1} + \cdots ,$$

ove Φ, Φ_i, a_i sono forme di $x_1, \dots, x_r$ degli ordini rispettivi $s, s_i, s-s_i-1$ (almeno). Ne risulta

$$\Phi x_0^{n-s} + \cdots = \Sigma (a_i x_0^{n-n_i-s+s_i+1} + \cdots)(\Phi_i x_0^{n_i-s_i} + \cdots)$$

dalla quale identità segue

$$\Sigma a_i \Phi_i = 0 ,$$

e però, verificandosi in P il caso semplice,

$$a_i = \sum_j p_{ij} \Phi_j \qquad (p_{ii} = 0 \, , \, p_{ij} = - p_{ji})$$

in cui le p_{ij} non dipendono da x_0 e sono dell'ordine $s - s_i - s_j - 1$.

Per il n. 1 si può, invece della espressione superiore di F, prendere la seguente:

$$F = \sum_i (A_i - \sum_j p_{ij} q_{ij} F_j) F_i ,$$

[1] S'intende bene che, per semplicità, si è accolta per ciascun punto P la stessa notazione $s, s_1, \dots, s_h$, ma che queste moltiplicità sono eventualmente diverse dall'uno all'altro dei punti P.

indicando con q_{ij} forme arbitrarie di $x_0, x_1, \dots, x_r$ e degli ordini

$$t_{ij} = t_{ji} = n - n_i - n_j + s_i + s_j - s + 1,$$

tali che $q_{ij} = q_{ji}$: giacchè basta appunto applicare il n. 1 sostituendo alle p_{ij} le $p_{ij}\,q_{ij}$. Intenderemo anzi espressamente che le ipersuperficie q_{ij} non passino per l'origine delle coordinate e che nelle forme q_{ij} il termine di grado più elevato in x_0 sia $x_0^{t_{ij}}$ (cioè abbia il coefficiente 1). Allora il coefficiente di $x_0^{n-n_i-s+s_i+1}$ nella forma

$$B_i = A_i - \sum_j p_{ij}\,q_{ij}\,F_j$$

riducesi ad $a_i - \sum\limits_j p_{ij}\,\Phi_j$ ed è perciò identicamente nullo, cioè la ipersuperficie B_i passa per il punto P colla moltiplicità $s - s_i$ (almeno).

Per trattare ora il caso di un numero qualunque di punti P, avendo dimostrato il teorema per un punto, procederemo pure per induzione e mostreremo che, se il teorema è vero per un certo numero y di punti P, lo è anche aggiungendo un altro $(y+1)^{esimo}$ di essi. Supponiamo adunque che sia

$$F = A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h,$$

ove $A_1, \dots, A_h$ soddisfino adesso al teorema per quegli y punti P. Di nuovo, se la moltiplicità s che l' $(y+1)^{esimo}$ punto P deve avere per F è eguale alla minima delle moltiplicità $s_1, \dots, s_h$, è dimostrato ciò che si vuole: e quindi, come innanzi, basterà far vedere che il teorema è vero per s, se è vero per $s-1$. Si rifaccia il calcolo precedente prendendo l'origine delle coordinate nell' $(y+1)^{esimo}$ punto e ponendo per le q_{ij} le stesse condizioni di prima e di più queste altre che le ipersuperficie q_{ij} abbiano negli y punti P moltiplicità così elevate che in essi le moltiplicità delle ipersuperficie B_i sieno quelle delle ipersuperficie A_i. Ciò è certamente possibile scegliendo n opportunamente grande e prendendo, ad es., per le ipersuperficie q_{ij} l'insieme di coni arbitrarî di ordini $s - s_i - s_j$ coi vertici nei detti y punti P ed aggiungendo eventualmente altre ipersuperficie arbitrarie così da raggiungere l'ordine t_{ij}. Allora si conclude, come dianzi, che anche nell' $(y+1)^{esimo}$ punto P si ha per le ipersuperficie B_i la moltiplicità richiesta dal teorema; il quale per conseguenza è così dimostrato.

3. Mediante il precedente teorema possiamo ora dimostrare quest'altro, nel quale però compare una limitazione per la Φ: *Se $h\,(\leq r)$ ipersuperficie* $F_1, \dots F_h$, *di* S_r *degli ordini* $n_1, \dots, n_h$ *si segano in una varietà ad $r-h$ dimensioni (anche con parti multiple) Φ_{r-h} e si ha un numero qualunque (finito) di punti* P *di Φ_{r-h} in ciascuno dei quali le* $F_1, \dots, F_h$

presentino il caso semplice ed abbiano le moltiplicità $s_1, \dots, s_h$, *il sistema lineare delle ipersuperficie* F *del modulo* $(F_1 \dots F_h)$ *che hanno in ciascun punto* P *la moltiplicità* s, *ha la dimensione*

$$D_h(n\,;\, n_1, \dots, n_h) - \sum_P D_h(s-1\,;\, s_1, \dots, s_h) - 1 .$$

Si è posto, come fa il Severi,

$$D_h(n\,;\, n_1, \dots n_h) = \Sigma \binom{n - n_{i_1} + r}{r} - \Sigma \binom{n - n_{i_1} - n_{i_2} + r}{r} +$$
$$+ \dots + (-1)^{h-2} \Sigma \binom{n - n_{i_1} - n_{i_2} - \dots - n_{i_{h-1}} + r}{r} +$$
$$+ (-1)^{h-1} \binom{n - n_1 - n_2 - \dots - n_h + r}{r},$$

ove per i_1, $i_1 i_2$, ..., $i_1 i_2 \dots i_{h-1}$ si devono sostituire tutte le combinazioni di 1ª, 2ª, ..., $(h-1)$ª specie dei numeri $1, 2, \dots, h$, colla solita convenzione di porre zero per ogni simbolo combinatorio in cui il numero superiore è $< r$; ed inoltre si indica con $\sum_P$ una somma estesa a tutti i punti P.

Basterà dimostrare, in virtù della proprietà del n. 2, che la suddetta dimensione (sempre per n opportunamente grande) è quella del sistema lineare

$$A_1 F_1 + \dots + A_h F_h = 0,$$

nel quale le ipersuperficie $A_1, \dots A_h$ degli ordini $n - n_1, \dots, n - n_h$ hanno in ciascun punto P le moltiplicità $s - s_1, \dots, s - s_h$.

A tale scopo, come già si è accennato in principio, si deve fare un ragionamento affatto simile a quello del n. 18, Cap. 11° del mio libro. Si trova dapprima che i sistemi lineari $A_1 F_1 = 0$, $A_2 F_2 = 0$ si segano in un sistema $X F_1 F_2 = 0$, ove X è una ipersuperficie di ordine $n - n_1 - n_2$ che ha in ogni punto P moltiplicità $s - s_1 - s_2$ (o nessuna, se questo numero è ≤ 0). Poi tre sistemi $A_1 F_1 = 0$, $A_2 F_2 = 0$, $A_3 F_3 = 0$ si segano nel sistema nel quale si segano (ad es.) il sistema $X F_1 F_2 = 0$, ora detto, e il sistema $A_3 F_3 = 0$ e però in un sistema $Y F_1 F_2 F_3 = 0$, ove Y è una ipersuperficie di ordine $n - n_1 - n_2 - n_3$ che ha in ciascun punto P una moltiplicità $s - s_1 - s_2 - s_3$, ecc. Gli h sistemi lineari $A_1 F_1 = 0, \dots$, $A_h F_h = 0$, le loro intersezioni a due a due, ..., ad $h-1$ ad $h-1$, e l'intersezione di tutti gli h sistemi hanno quindi le dimensioni (essendo indipendenti le condizioni nei punti P, per n opportunamente grande):

$$\binom{n - n_{i_1} + r}{r} - 1 - \sum_{\mathrm{P}} \binom{s - 1 + s_{i_1} + r}{r},$$

$$\binom{n - n_{i_1} - n_{i_2} + r}{r} - 1 - \sum_{\mathrm{P}} \binom{s - 1 + s_{i_1} + s_{i_2} + r}{r},$$

. . . .

$$\binom{n - n_{i_1} - n_{i_2} - \cdots - n_{i_{h-1}} + r}{r} - \\ - 1 - \sum_{\mathrm{P}} \binom{s - 1 + s_{i_1} + s_{i_2} + \cdots + s_{i_{h-1}} + r}{r},$$

$$\binom{n - n_1 - n_2 - \cdots - n_{h-1} + r}{r} - \\ - 1 - \sum_{\mathrm{P}} \binom{s - 1 + s_1 + s_2 + \cdots + s_{h-1} + r}{r}.$$

Ora, per l'applicazione della formola (6) del Cap. 1° del mio libro, occorre verificare le condizioni di *regolarità*. Ciò si fa pure in modo simile a quello seguito nel già citato n. 18, Cap. 11° dello stesso mio libro, tenuta però presente la proprietà del n. 2. Così il sistema $A_3 F_3 = 0$ sega i due sistemi $A_1 F_1 = 0$, $A_2 F_2 = 0$ in $X F_1 F_3 = 0$, $X' F_2 F_3 = 0$, avendo le ipersuperficie X, X', degli ordini $n - n_1 - n_3$, $n - n_2 - n_3$, in ciascuno dei punti P moltiplicità $s - s_1 - s_3$, $s - s_2 - s_3$. Il sistema $X F_1 F_3 + X' F_2 F_3 = 0$, al quale appartengono quei due sistemi d'intersezione, deve, per la condizione di regolarità, essere precisamente il sistema d'intersezione di $A_3 F_3 = 0$ col sistema $A_1 F_1 + A_2 F_2 = 0$, a cui appartengono $A_1 F_1 = 0$, $A_2 F_2 = 0$. Ciò infatti si dimostra notando che le ipersuperficie di questo sistema d'intersezione sono date dall'identità $A_3 F_3 = A_1 F_1 + A_2 F_2$, dalla quale, applicando, come si può, il teorema del n. 4 della Nota di Severi, si ricava $A_3 = X F_1 + X' F_2$, potendosi (n. 2) le X, X', degli ordini $n - n_1 - n_2$, $n - n_1 - n_3$, scegliere così che abbiano in ciascun punto P (in cui A_3 ha moltiplicità $s - s_3$) moltiplicità $s - s_1 - s_3$, $s - s_2 - s_3$. Si trova adunque, come si è detto, lo stesso sistema di prima. Ecc.

Applicando la suddetta formola (6) del mio libro, si ha immediatamente il risultato che ci eravamo proposto di ottenere.

4. È ovvio adesso dedurre dal teorema precedente il teorema di König: *Se r ipersuperficie $F_1, \ldots, F_r$, di S_r, degli ordini $n_1, \ldots, n_r$ si segano in un numero finito di punti* P, *in ciascuno dei quali le $F_1, \ldots, F_r$ presentino il caso semplice ed abbiano le molteplicità $s_1, \ldots, s_r$, una ipersuperficie* F *avente in ciascun punto* P *una moltiplicità $s = s_1 + \cdots + s_r - r + 1$ appartiene al modulo* $(F_1 \ldots F_r)$.

In vero, per il detto valore di s e supposto sempre n opportunamente grande, si ha

$$D_r(n\,;\,n_1 \dots n_r) = \binom{n+r}{r} - 1 - n_1 n_2 \dots n_r$$

$$D_r(s-1\,;\,s_1 \dots s_r) = \binom{s-1+r}{r} - 1 - s_1 s_2 \dots s_r$$

e inoltre, per la condizione del caso semplice,

$$\sum_P s_1 s_2 \dots s_r = n_1 n_2 \dots n_r\,.$$

Sicchè, applicando la proposizione del n. 3, si trova

$$\binom{n+r}{r} - 1 - \sum_P \binom{s-1+r}{r}$$

come dimensione del sistema lineare delle ipersuperficie appartenenti al modulo $(F_1 \dots F_r)$ ed aventi in ciascun punto P la considerata moltiplicità s. Ma questa è anche la dimensione del sistema di *tutte* le ipersuperficie (di ordine abbastanza alto) che hanno in ogni punto P quella moltiplicità s: quindi il teorema risulta dimostrato nell' ipotesi di n opportunamente elevato.

Si passa ora a qualunque valore dell'ordine n di F, considerando il prodotto di F per una forma generica Φ di ordine abbastanza alto, così che il teorema sia valevole per il prodotto ΦF, cioè si abbia

$$\Phi F = A_1 F_1 + \cdots + A_r F_r\,,$$

da cui, per il teorema del n. 4 della Nota di Severi, si trae appunto

$$F = A'_1 F_1 + \cdots + A'_r F_r\,.$$

Si può notare che, se n è abbastanza grande, si possono scegliere (secondo il n. 2) per le $A'_1, A'_2, \dots, A'_r$ ipersuperficie aventi in ciascun punto P moltiplicità $s_2 + s_3 + \cdots + s_r - r + 1$, $s_1 + s_3 + \cdots + s_r - r + 1, \dots$, $s_1 + s_2 + \cdots + s_{r-1} - r + 1$ (almeno), mentre pare che ciò non possa farsi per n qualunque, se $r > 2$.