# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XVIII.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

**Fisica matematica.** — *L'influenza di uno strato dielettrico in un campo elettromagnetico e l'equazione di Eulero delle campane sonore.* Nota di GUIDO FUBINI, presentata dal Corrisp. T. LEVI-CIVITA.

La presente Nota costituisce un complemento a due Note pubblicate con titolo simile nei Rend. della R. Acc. dei Lincei (1908); essa però non risolve completamente il problema di cui si occupa, ma si accontenta di ridurne la risoluzione a quella di un'equazione classica alle derivate parziali (l'equazione delle campane sonore), la quale non sembra però avere attratto l'attenzione dei moderni analisti. Ciononostante la difficoltà e l'importanza della questione trattata rendono forse non prive di ogni interesse le seguenti considerazioni.

Una carica elettrica $m$ si muove di un moto rettilineo uniforme con velocità costante $v$ parallelamente al piano $z=0$. Con $x, y, z$ indicheremo coordinate cartesiane ortogonali, con $d>0$ la distanza costante dalla carica al piano $z=0$. Con $\xi, \eta, \zeta$ indicheremo coordinate cartesiane ortogonali mobili scelte in guisa che i piani $z=0$, $\zeta=0$ coincidano, e che nel nuovo sistema cartesiano la carica $m$ abbia le coordinate $(0, 0, d)$. Sul piano $z=\zeta=0$ esista uno strato dielettrico. Vogliamo trovare il campo elettromagnetico stazionario così generato [1]. Se noi indichiamo con F, e con U, V, W il contributo portato al potenziale elettrostatico, e alle componenti del potenziale vettoriale dallo strato dielettrico con X, Y, Z e con L, M, N le componenti della forza elettrica e magnetica nel campo; allora, posto

$$\varDelta^2 = \xi^2 + (1-a^2)\,[\eta^2 + (\zeta - d)^2]$$

si trova [2] (indicando con $a<1$ il rapporto tra $v$ e la velocità della luce):

$$(1)\left\{\begin{aligned} X &= -\frac{\partial F}{\partial \xi} + a\frac{\partial U}{\partial \xi} - m(1-a^2)\frac{\partial \frac{1}{\varDelta}}{\partial \xi} \\ Y &= -\frac{\partial F}{\partial \eta} + a\frac{\partial V}{\partial \xi} - m\frac{\partial \frac{1}{\varDelta}}{\partial \eta} \\ Z &= -\frac{\partial F}{\partial \zeta} + a\frac{\partial W}{\partial \xi} - m\frac{\partial \frac{1}{\varDelta}}{\partial \zeta} \end{aligned}\right. \qquad (2)\left\{\begin{aligned} L &= \frac{\partial V}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \eta} \\ M &= \frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} - ma\frac{\partial \frac{1}{\varDelta}}{\partial \zeta} \\ N &= \frac{\partial U}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \xi} + ma\frac{\partial \frac{1}{\varDelta}}{\partial \eta} \end{aligned}\right.$$

[1] Per la storia di questa questione, e per indicazioni bibliografiche, cfr. le Note citate.

[2] Cfr. Levi-Civita, Annales de la Faculté de Toulouse, Serie 2ª, Tomo 4.

le quali naturalmente (quando vi si ponga $F = U = V = W = 0$) si riducono alle equazioni, che definirebbero il campo nell'assenza di ogni strato dielettrico.

Le $F, U, V, W$ devono essere finite e continue insieme alle loro derivate in tutto lo spazio, eccetto che sul piano $\zeta = 0$, dove vi può essere qualche discontinuità, devono annullarsi all'infinito almeno del primo ordine, devono avere all'infinito derivate prime nulle almeno del secondo ordine, devono essere integrali di

$$\square = (1 - a^2)\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}, \tag{3}$$

e devono infine soddisfare alla

$$a\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}. \tag{4}$$

Di più, per quanto è stato enunciato nelle mie Note citate, le $F, U, V, W$ devono essere tali che, se noi indichiamo con un indice $+$ o con un indice $-$ i valori limiti di una funzione sul piano $\zeta = 0$ secondo che vi si tende dal semispazio $\zeta > 0$, o dal semispazio $\zeta < 0$, valgano le

$$X_+ = X_- \; ; \; Y_+ = Y_- \; ; \; L_+ - L_- = ah\frac{\partial Y}{\partial \xi} \; ; \; M_+ - M_- = -ah\frac{\partial X}{\partial \xi} \tag{5}$$

dove la costante *positiva* $h$ è uguale al prodotto dello spessore dello strato per la sua costante dielettrica.

Poniamo, come è lecito evidentemente:

$$F_1 = F - a\int_{\pm\infty}^{\zeta}\frac{\partial W}{\partial \xi}d\zeta \; ; \; U_1 = U - \int_{\pm\infty}^{\zeta}\frac{\partial W}{\partial \xi}d\zeta \; ;$$

$$V_1 = V - \int_{\pm\infty}^{\zeta}\frac{\partial W}{\partial \eta}d\zeta \; ; \; W_1 = 0,$$

dove si assume il segno $+$ o il segno $-$ secondochè si tratta di un punto del semispazio $\zeta > 0$, o del semispazio $\zeta < 0$. Evidentemente le $F_1, U_1, V_1, W_1$ soddisferanno alle (3), (4), avranno all'infinito lo stesso comportamento delle $F, U, V, W$, saranno ancora dappertutto continue insieme alle loro derivate, eccetto al più sul piano $\zeta = 0$; di più se nelle (1), (2) alle $F, U, V, W$ sostituiamo le $F_1, U_1, V_1, W_1$, le $X, Y, Z, L, M, N$ non mutano di valore. Se noi indichiamo, per semplicità, le $F_1, U_1, V_1, W_1$ di nuovo con $F, U, V, W$ ne concludiamo che *nelle* (1), (2), (3), (4) *si può supporre* $W = 0$. Di più, se noi chiamiamo potenziale di strato o potenziale di doppio strato una funzione delle $\xi, \eta, \zeta$, che si riduce a un ordinario potenziale di strato o di doppio strato sostituendovi $\xi$ a $\frac{\xi}{\sqrt{1-a^2}}$ (con la quale sostituzione la (3) si riduce all'ordinaria equazione delle funzioni armoniche) possiamo dedurre da quanto sopra che F, U, V saranno ciascuna la somma di un potenziale di strato, e di un potenziale di doppio strato corrispondenti a una distribuzione di masse sul piano $\zeta = 0$. Se noi indichiamo con $\varphi, u, v$ i tre potenziali corrispondenti di doppio strato, si deduce dalle (1), ricordando che X e Y sono per le (5) continue anche sul piano $\zeta = 0$, che

$$(\alpha) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + a\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + a\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sul piano } \zeta = 0 .$$

E dalla (4) (ove è da porsi, come dicemmo, W = 0) si trae

$$(\beta) \qquad a\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} .$$

Poichè i primi membri della ($\alpha$) sono integrali della (3) regolari per $\zeta \neq 0$, nulli all'infinito, le ($\alpha$) varranno in tutto lo spazio.

Derivando ($\beta$) rispetto a $\xi$, e ricordando ($\alpha$) si trae

$$(1-a^2)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0 ;$$

donde, per la $\Box \varphi = 0$, si avrà

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 .$$

E, poichè $\varphi$ è nullo all'infinito, si trae che $\varphi = 0$. Per la stessa ragione dalle ($\alpha$) si trae $u = v = 0$. E ne scende che le F, U, V *sono potenziali di semplice strato* dovuti a una distribuzione di masse sul piano $\zeta = 0$; o in altre parole *sono dappertutto continue*, mentre le loro derivate possono essere discontinue per $\zeta = 0$. *Esse hanno di più valori uguali in punti simmetrici rispetto al piano* $\zeta = 0$. In virtù di queste condizioni, le due prime equazioni (5) sono soddisfatte; e le due ultime equazioni (5) dànno per le (2)

$$2\frac{\partial V}{\partial |\zeta|} = ah\frac{\partial Y}{\partial \xi} \quad ; \quad 2\frac{\partial U}{\partial |\zeta|} = ah\frac{\partial X}{\partial \xi} \qquad \text{per } \zeta = 0 .$$

Indicando con $\nabla$ la quantità che si deduce da $\Delta$, scambiando $d$ in

$-d$, osservando che $\Delta = \nabla$ per $\zeta = 0$, ricordando le (1), (2), le precedenti equazioni diventano

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{\partial U}{\partial|\zeta|} &= -ah\frac{\partial^2 F}{\partial\xi^2} + a^2 h\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} - mah(1-a^2)\frac{\partial^2 \frac{1}{\nabla}}{\partial\xi^2} \\ 2\frac{\partial V}{\partial|\zeta|} &= -ah\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\eta} + a^2 h\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2} - mah\frac{\partial^2 \frac{1}{\nabla}}{\partial\xi\,\partial\eta} \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni devono essere soddisfatte per $\zeta = 0$, e poichè i due membri di esse sono integrali di (3), regolari per $\zeta = 0$ e nulli all'infinito, esse saranno soddisfatte anche per $\zeta > 0$.

Posto nella (4) $W = 0$, essa diventa

$$(4)^{bis}\qquad a\frac{\partial F}{\partial\xi} = \frac{\partial U}{\partial\xi} + \frac{\partial V}{\partial\eta}.$$

Il nostro problema è ridotto allo studio delle (6), $(4)^{bis}$ e delle (3) nel semispazio $\zeta > 0$. Derivando le (6) rispetto a $\xi$ e $\eta$, sommando, si trova per la $(4)^{bis}$ e per la $\Box F = 0$:

$$2a\frac{\partial^2 F}{\partial\xi\,\partial\zeta} = ah\frac{\partial^3 F}{\partial\xi^2\,\partial\xi} + mah\frac{\partial^3 \frac{1}{\nabla}}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}.$$

Integrando rispetto a $\xi$ da $-\infty$ a $\xi$, e rispetto a $\zeta$ da $-\infty$ a $\zeta$, se ne deduce, poichè $F = 0$ all'infinito:

$$2F = h\frac{\partial F}{\partial\zeta} + mh\frac{\partial \frac{1}{\nabla}}{\partial\zeta},$$

donde si trae

$$(\mathrm{I})\qquad F = -\frac{m}{\nabla} + \frac{2m}{h}e^{\frac{2}{h}\zeta}\int_\zeta^\infty \frac{1}{\nabla}e^{-\frac{2}{h}\zeta}\,d\zeta \qquad (\text{per } \zeta > 0)$$

che si verifica tosto soddisfare alla $\Box F = 0$. E si vede che questa formola presenta una notevolissima concordanza con quella trovata per tutt'altra via nelle mie Note citate per il caso elettrostatico $a = 0$. Proponiamoci di determinare la U, valendoci della prima delle (6) e della $\Box U = 0$. Sostituendo in $\Box U = 0$ a $\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}$ il valore che se ne deduce da (6), si trova

$$(\mathrm{II})\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\eta^2} + (1-a^2)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \frac{a^4 h^2}{4}\frac{\partial^4 U}{\partial\xi^4} =$$

$$= \left(\frac{a^3 h^2}{4}\frac{\partial^4 U}{\partial\xi^4} + \frac{ah}{2}\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}\right)\left[F + m(1-a^2)\frac{1}{\nabla}\right] = \text{funzione nota.}$$

*Basterà anzi integrare la* (II) *sul piano* $\zeta = 0$; *perchè la* $\Box U = 0$ *determinerà la* U *in tutto lo spazio*. Viceversa la U soddisfi per $\zeta = 0$ alla (II), e per $\zeta \neq 0$ alla $\Box U = 0$. Essa soddisferà alla (II) anche per $\zeta > 0$, perchè i due membri di (II) sono integrali di $\Box = 0$ nulli all'infinito, e regolari per $\zeta > 0$. Sottraendo la (II) dalla $\Box U = 0$, si trova che per $\zeta > 0$ è

$$(8) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} + \frac{a^2 h}{2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = 0 \qquad \Box \Theta = 0,$$

quando si ponga

$$\Theta = \frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{a^2 h}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{ah}{2} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + m(1 - a^2) \frac{\partial^2 \frac{1}{\nabla}}{\partial \xi^2} \right].$$

Ma dalla (8), coi soliti e classici metodi di integrazioni per parti, si deduce $\Theta = 0$, ossia si deduce che U soddisfa alla (6).

In modo simile si trova che basterà determinare V in guisa che soddisfi a un'equazione $(\mathrm{II})^{bis}$, affatto analoga alla (II), sul piano $\zeta = 0$. La V resterà determinata in tutto lo spazio dalla $\Box V = 0$, e si proverà ancora che essa soddisfa alla (6).

Non abbiamo finora tenuto conto di $(4)^{bis}$. Ma dalle (6) si trae per le (3) e per (7)

$$2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} - a \frac{\partial F}{\partial \xi} \right) = a^2 h \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} - a \frac{\partial F}{\partial \xi} \right)$$

donde, con metodo analogo al precedente, si trova che per $\zeta = 0$, la

$$\Phi = \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} - a \frac{\partial F}{\partial \xi}$$

soddisfa alla

$$(\mathrm{III}) \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + (1 - a^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{a^4 h^2}{4} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \xi^4} = 0,$$

equazione dello stesso tipo della (II). Se ora la (II) possiede un solo integrale regolare e nullo all'infinito, dalla (III) si deduce $\Phi = 0$; ossia le U, V determinate dalle (II), $(\mathrm{II})^{bis}$ soddisferanno senz'altro alla $(4)^{bis}$. Se invece per la (II) non vale un teorema di unicità, bisognerà per U, V scegliere due tali integrali delle (II), $(\mathrm{II})^{bis}$, che la $\Phi$ non solo sia un integrale di (III), ma sia senz'altro identicamente nulla. In sostanza la nostra questione è ridotta allo studio dell'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} + (1 - a^2) \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} + \frac{a^4 h^2}{4} \frac{\partial^4 f}{\partial \xi^4} = \text{funzione nota.}$$

Questa è l'equazione che Eulero trovò *per le campane sonore*, e che egli studiò in *Petrop. Comm.*, 1764, pag. 261 e seg.; cfr. anche la Mem. del Plana nel Journ. de l'École Polytechnique (1815). Per altre indicazioni bibliografiche cfr. Burkhardt, *Entwickelung nach oscillierenden Functionen* negli Jahresberichte der deutschen Mathematischen Vereinigung, Bd. 10, pp. 360 e 365 (1902).

## Matematica. — *Doppî sistemi di linee della sfera immagini di asintotiche.* Nota di Gustavo Sannia, presentata dal Socio L. Bianchi.

Se di una superficie si fa la rappresentazione sferica di Gauss, al doppio sistema delle asintotiche della superficie corrisponde sulla sfera un doppio sistema di linee che *non è qualunque*. Ed è importante la conoscenza dei doppî sistemi di linee della sfera che sono immagini di asintotiche di qualche superficie.

Scopo di questa Nota è di segnalarne alcuni di facile costruzione e che dipendono da sei funzioni arbitrarie.

*Prese ad arbitrio due curve nello spazio, si considerino i coni che dai punti di ciascuna di esse proiettano l'altra: questi coni, trasportati parallelamente a se stessi col vertice nel centro di una sfera, tracciano sulla sfera un doppio sistema di linee che sono le immagini delle asintotiche di una superficie.*

Infatti i detti coni sono le sviluppabili della congruenza costituita dalle rette che si appoggiano alle due curve, e che ha le superficie focali ridotte a queste curve. La superficie media della congruenza è una superficie di traslazione sulla quale, come è facile vedere [1], i detti coni tracciano un doppio sistema coniugato. Da ciò segue subito l'enunciato, perchè, come ha dimostrato il Guichard, se le sviluppabili di una congruenza tracciano sulla superficie media un doppio sistema coniugato, le loro immagini sferiche sono anche immagini delle asintotiche di una superficie [2].

Daremo anche una dimostrazione analitica, per cercare nel contempo come si caratterizzano i nostri sistemi sferici e di quali superficie sono immagini di asintotiche.

Se

$$x_1 = x_1(u)\,,\ y_1 = y_1(u)\,,\ z_1 = z_1(u)\,,$$
$$x_2 = x_2(v)\,,\ y_2 = y_2(v)\,,\ z_2 = z_2(v)$$

sono le equazioni delle due curve, le coordinate X, Y, Z del punto imma-

[1] Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª ed., vol. I, pag. 142; oppure Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, pag. 98 e segg.

[2] Bianchi, loc. cit., II, § 229.