ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Questa è l'equazione che Eulero trovò *per le campane sonore*, e che egli studiò in *Petrop. Comm.*, 1764, pag. 261 e seg.; cfr. anche la Mem. del Plana nel Journ. de l'École Polytechnique (1815). Per altre indicazioni bibliografiche cfr. Burkhardt, *Entwickelung nach oscillierenden Functionen* negli Jahresberichte der deutschen Mathematischen Vereinigung, Bd. 10, pp. 360 e 365 (1902).

Matematica. — *Doppî sistemi di linee della sfera immagini di asintotiche*. Nota di GUSTAVO SANNIA, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Se di una superficie si fa la rappresentazione sferica di Gauss, al doppio sistema delle asintotiche della superficie corrisponde sulla sfera un doppio sistema di linee che *non è qualunque*. Ed è importante la conoscenza dei doppî sistemi di linee della sfera che sono immagini di asintotiche di qualche superficie.

Scopo di questa Nota è di segnalarne alcuni di facile costruzione e che dipendono da sei funzioni arbitrarie.

Prese ad arbitrio due curve nello spazio, si considerino i coni che dai punti di ciascuna di esse proiettano l'altra: questi coni, trasportati parallelamente a se stessi col vertice nel centro di una sfera, tracciano sulla sfera un doppio sistema di linee che sono le immagini delle asintotiche di una superficie.

Infatti i detti coni sono le sviluppabili della congruenza costituita dalle rette che si appoggiano alle due curve, e che ha le superficie focali ridotte a queste curve. La superficie media della congruenza è una superficie di traslazione sulla quale, come è facile vedere [1], i detti coni tracciano un doppio sistema coniugato. Da ciò segue subito l'enunciato, perchè, come ha dimostrato il Guichard, se le sviluppabili di una congruenza tracciano sulla superficie media un doppio sistema coniugato, le loro immagini sferiche sono anche immagini delle asintotiche di una superficie [2].

Daremo anche una dimostrazione analitica, per cercare nel contempo come si caratterizzano i nostri sistemi sferici e di quali superficie sono immagini di asintotiche.

Se

$$x_1 = x_1(u)\,,\ y_1 = y_1(u)\,,\ z_1 = z_1(u)\,,$$
$$x_2 = x_2(v)\,,\ y_2 = y_2(v)\,,\ z_2 = z_2(v)$$

sono le equazioni delle due curve, le coordinate X, Y, Z del punto imma-

[1] Cfr. p. es. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, 2ª ed., vol. I, pag. 142; oppure Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. I, pag. 98 e segg.

[2] Bianchi, loc. cit., II, § 229.

gine del raggio che unisce i punti (u), (v) delle due curve, sulla sfera che ha per centro l'origine delle coordinate e raggio 1, sono

$$X=\frac{x_1-x_2}{r},\ Y=\frac{y_1-y_2}{r},\ Z=\frac{z_1-z_2}{r},$$

ove

$$r=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Derivando rispetto ad u, si ha

$$\frac{\partial X}{\partial u}=\frac{1}{r}\frac{dx_1}{du}-\frac{x_1-x_2}{r^2}\frac{\partial r}{\partial u}=\frac{1}{r}\frac{dx_1}{du}-\frac{X}{r}\frac{\partial r}{\partial u},$$

indi

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}=-\frac{1}{r^2}\frac{dx_1}{du}\cdot\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{X}{r^2}\frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}-\frac{X}{r^2}\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}$$

ossia, per la precedente,

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial\log r}{\partial v}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial\log r}{\partial u}\cdot\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{X}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}.$$

Ciò vale anche per Y e Z; dunque X, Y, Z sono tre soluzioni dell'equazione di Laplace

$$(1)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial\log r}{\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log r}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\varphi}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}=0.$$

Ma è noto [1] che X, Y, Z sono tre soluzioni dell'equazione

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial v}-f\varphi,$$

ove i simboli di Christoffel

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=\frac{g\frac{\partial e}{\partial v}-f\frac{\partial g}{\partial u}}{2(eg-f^2)},\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=\frac{e\frac{\partial g}{\partial u}-f\frac{\partial e}{\partial v}}{2(eg-f^2)}$$

sono calcolati rispetto all'elemento lineare sferico

$$dX^2+dY^2+dZ^2=e\,du^2+2f\,du\,dv+g\,dv^2;$$

dunque necessariamente

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}=-\frac{\partial\log r}{\partial v},\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}=-\frac{\partial\log r}{\partial u},\ f=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v},$$

[1] Bianchi, loc. cit, I, §§ 43 e 72.

da cui, eliminando r,

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - f.$$

Queste relazioni caratterizzano i nostri sistemi sferici u, v, e provano l'enunciato, perchè

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}$$

è la condizione (del Dini) necessaria e sufficiente affinchè le linee sferiche u, v sieno le immagini delle asintotiche di una superficie S (¹).

È facile poi cercare le corrispondenti superficie S. Basta osservare che la (1), col porre

$$r\varphi = \theta,$$

diventa

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Prese ad arbitrio tre soluzioni linearmente indipendenti di questa equazione

$$\xi = f_1(u) + \varphi_1(v) \quad , \quad \eta = f_2(u) + \varphi_2(v) \quad , \quad \zeta = f_3(u) + \varphi_3(v),$$

le formole di Lelieuvre, cioè le

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{vmatrix} \eta & \frac{\partial \eta}{\partial u} \\ \zeta & \frac{\partial \zeta}{\partial u} \end{vmatrix} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \begin{vmatrix} \eta & \frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \zeta & \frac{\partial \zeta}{\partial v} \end{vmatrix}$$

e le analoghe che si ottengono cambiandovi x, η, ζ in y, ζ, ξ o in z, ξ, η, definiscono una superficie

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v)$$

sulla quale le u, v sono le asintotiche (²).

Or queste superficie son note (³) e si ottengono con la seguente costruzione di Darboux (⁴): *se per ogni punto di una superficie di traslazione si conduce il raggio intersezione dei due piani osculatori delle curve generatrici che vi passano, si forma una congruenza sulle cui superficie focali si corrispondono le asintotiche* (cioè una congruenza W); *le superficie focali sono le più generali superficie cercate.*

(¹) Bianchi, loc. cit., I, § 73.

(²) Bianchi, loc. cit., I, § 77.

(³) Bianchi, loc. cit., II, § 245.

(⁴) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, pag. 372 e segg.