ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Sulla caratteristica del determinante di una forma di Hermite.* Nota di O. Nicoletti, presentata dal Socio U. Dini.

1. Siano

$$(1) \qquad A(x, \overline{x}) = \Sigma a_{ik} x_i \overline{x}_k, \quad B(x, \overline{x}) = \Sigma b_{ik} x_i \overline{x}_k,$$
$$(\overline{a}_{ik} = a_{ki}, \overline{b}_{ik} = b_{ki}, \quad i, k = 1, 2, \dots, n)$$

due forme di Hermite in $2n$ variabili complesse coniugate $x_1, x_2 \dots x_n$; $\overline{x}_1, \overline{x}_2 \dots \overline{x}_n$ e poniamo

$$(2) \qquad A\omega_1 + B\omega_2 | = |a_{ik}\omega_1 + b_{ik}\omega_2| = (AB)_n \omega_1^n +$$
$$(AB)_{n-1} \omega_1^{n-1} \omega_2 + \cdots + (AB)_0 \omega_2^n, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n);$$

indichiamo cioè con $(AB)_r$ $(r = n, n-1, \dots 0)$ gli invarianti simultanei del fascio di forme $A\omega_1 + B\omega_2$. Supporremo che il determinante (2) non sia identicamente nullo.

Supponiamo anche che la forma $B(x, \overline{x})$ *non sia indefinita*. È noto allora il teorema:

I divisori elementari del determinante (2), diversi da una potenza di ω_1, sono reali e lineari [1].

In altre parole, l'equazione in ω (non identica):

$$(2)' \qquad (AB)_0 \omega^n + (AB)_1 \omega^{n-1} + \cdots (AB)_n = 0$$

ha tutte le sue radici reali, ed una radice ω_0 di essa equazione, multipla di ordine k, rende il determinante (2), nel quale si ponga $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega_0$, di caratteristica $n - k$.

Ricordiamo ancora (come immediato corollario della regola di Cartesio) che in una equazione algebrica con tutte radici reali non possono mancare *due* o più termini consecutivi, compresi fra termini diversi da zero [2].

Se, oltre la forma B, *anche la* $A(x, \overline{x})$ *si suppone non indefinita*, le radici dell'equazione (2)', che non sono nulle, hanno tutte lo stesso segno; quindi, ancora per la regola di Cartesio, nell'equazione stessa non può mancare alcun termine, compreso tra due diversi da zero.

2. Dalle considerazioni precedenti si traggono conclusioni notevoli.

[1] Cfr. Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Teubner, Lipsia, 1899, pp. 179, 180) ed anche: Nicoletti, *Su una classe di equazioni a radici reali* (Annali di Matematica, ser. 3ª, tomo IX, pp. 106-110, Milano, 1903).

[2] Cfr. Netto, *Vorlesungen über Algebra* (Teubner, Lipsia, 1896, vol. 1°, pag. 221).

Supponiamo che la forma $B(x, \bar{x})$ non sia indefinita; si ha il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante $A = |a_{ik}|$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ abbia la caratteristica r (con $0 \leq r \leq n$) è che si abbia:

$$(3)_r \qquad (AB)_{r+2} = (AB)_{r+1} = 0\,, (AB)_r \neq 0 \text{ [1]}.$$

Il teorema è evidente per $r = n$, $r = n - 1$; per $r < n - 1$, ricordando che la equazione $(2)'$ ha tutte le radici reali, dalle $(3)_r$ si trae (poichè $(AB)_r \neq 0$):

$$(AB)_{r+3} = (AB)_{r+4} = \cdots = (AB)_n = 0$$

e quindi l'equazione $(2)'$ ha la radice zero multipla dell'ordine $n - r$ (e non maggiore, poichè $(AB)_r \neq 0$); perciò il determinante (2), nel quale si sia fatto $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 0$, cioè il determinante della forma A, ha la caratteristica r, il che dimostra il teorema.

In guisa del tutto analoga si ha:

Se anche la forma $A(x, \bar{x})$ non è indefinita, condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante A abbia la caratteristica r (con $0 \leq r \leq n$) è che si abbia:

$$(3)'_r \qquad (AB)_{r+1} = 0\,, (AB)_r \neq 0\,.$$

In questo caso dunque la condizione $(AB)_{r+2} = 0$ è contenuta nelle altre due [2].

3. Poniamo in particolare

$$B(x, \bar{x}) = \sum_1^m {}_i\, x_i \bar{x}_i\,, \quad (m \leq n)$$

e distinguiamo due casi:

a) Sia $m = n$. È $(AB)_0 = 1$ ed $(AB)_r$ è la somma dei minori principali di ordine r del determinante A. Abbiamo dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante A di una forma di Hermite abbia la caratteristica r è che sian nulle le somme dei minori principali di ordine

(1) Poniamo, come è naturale, $(AB)_{n+1} = (AB)_{n+2} = 0$.

(2) Questo in particolare accade quando si abbia

$$A(x, \bar{x}) = \sum_1^p {}_\alpha\, \Omega_\alpha(x) \,.\, \bar{\Omega}_\alpha(\bar{x}),$$

essendo le Ω_1 $\Omega_2, \ldots, \Omega_p$ p forme lineari nelle $x_1, x_2, \ldots x_n$. In questo caso il determinante A si ottiene moltiplicando (per righe) la matrice delle forme $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_p$ per quella delle forme coniugate: se in particolare le forme stesse sono reali, il determinante A è il quadrato per righe della matrice delle forme $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_p$.

$r+1$ ed $r+2$ del determinante stesso e non quella dei minori principali di ordine r.

Se la forma A di Hermite non è indefinita, è necessario e sufficiente sia nulla la somma dei minori principali di ordine $r+1$ e non quella dei minori di ordine r.

Ne segue evidentemente:

Se un determinante A di Hermite ha la caratteristica r, vi è in esso qualche minore principale di ordine r diverso da zero.

b) Sia $m < n$. Perchè il determinante (2) non sia identicamente nullo, la matrice delle ultime $n-m$ righe (o colonne) del determinante A deve avere la caratteristica $n-m$; $(AB)_r$ è poi (per $r \geq n-m$) uguale alla somma dei minori principali di ordine r del determinante A, i quali contengono il minore di ordine $n-m$ delle ultime $n-m$ righe e colonne.

Supponiamo in particolare che questo minore sia diverso da zero; è allora anche soddisfatta la condizione che la matrice delle ultime $n-m$ righe (colonne) di A abbia la caratteristica $n-m$ ed è insieme $(AB)_{n-m} \neq 0$. Abbiamo così il teorema:

Sia A_t un minore principale diverso da zero, di ordine t, del determinante A di Hermite. Condizione necessaria e sufficiente perchè il determinante A abbia la caratteristica $r \geq t$, è che sian nulle le somme dei minori principali di ordine $r+1$ ed $r+2$ del determinante A che contengono A_t (se la forma $A(x, \bar{x})$ non è indefinita, la somma dei minori principali di ordine $r+1$ che contengono A_t) e non quella dei minori principali di ordine r, che contengono A_t.

E come sopra, ne segue:

Se un determinante A di Hermite ha la caratteristica r ed A_t è un suo minore principale di ordine t, diverso da zero, vi è in A qualche minore principale di ordine r, diverso da zero, che contiene A_t.

4. *a*) Se gli elementi a_{ik} si suppongono reali, il determinante A è simmetrico, ed il primo teorema del n. 2 è noto in parte per $r = n-2$.

b) Gli elementi a_{ik} siano immaginarî puri, e quindi sia $a_{ik} = -a_{ki}$; dividendone tutti gli elementi per i, il determinante A si riduce ad un determinante emisimmetrico reale. In questo caso tutte le $(AB)_r$ con $r \equiv 1 \pmod 2$ sono identicamente nulle; deve dunque nella $(3)_r$ aversi $r \equiv 0 \pmod 2$, ed essendo allora identicamente $(AB)_{r+1} = 0$, le $(3)_r$ si riducono alle due condizioni:

$$(AB)_{r+2} = 0 \ , \ (AB)_r \neq 0 \ , \ \ (r \equiv 0 \pmod 2)).$$

Ne seguono, in particolare, i teoremi:

Qualunque determinante emisimmetrico, ad elementi reali, ha caratteristica pari.

Perchè un determinante A emisimmetrico, reale, abbia la caratteristica $2s$, è necessario e sufficiente che sia nulla la somma dei suoi minori principali di ordine $2s+2$, ma non quella dei minori principali di ordine $2s$.

Se un determinante emisimmetrico, reale, ha la caratteristica $2s$, vi è in esso qualche minore principale di ordine $2s$ diverso da zero.

Sia A_{2k} un minore principale, di ordine $2k$, diverso da zero, del determinante emisimmetrico reale A; perchè questo abbia la caratteristica $2s$ (con $s \geq k$) è necessario e sufficiente che sia nulla la somma dei suoi minori principali di ordine $2s+2$ che contengono il minore A_{2k}, non lo sia la somma analoga dei minori principali di ordine $2s$.

5. Facciamo ancora una osservazione. Il teorema generale, dimostrato al n. 2, dà come condizioni necessarie e sufficienti perchè il determinante A di Hermite abbia la caratteristica r, le due eguaglianze $(AB)_{r+1} = (AB)_{r+2} = 0$ e la disuguaglianza $(AB)_r \neq 0$.

È facile vedere che *queste condizioni sono indipendenti.* Osserviamo perciò innanzi tutto che l'essere $(AB)_r \neq 0$, porta che il determinante della forma $B(x, \bar{x})$, non indefinita per ipotesi, ha una caratteristica non minore di $n-r$ e quindi non può aversi identicamente (cioè qualunque siano le $a_{ki} = \bar{a}_{ki}$) $(AB)_s = 0$ con $s > r$. Osserviamo inoltre che qualunque equazione $G(\omega) = 0$ di grado $m \leq n$, a radici tutte reali, può sempre riguardarsi come ottenuta eguagliando a zero il determinante del fascio di due forme di Hermite in $2n$ variabili, la seconda delle quali non sia indefinita. Se è infatti

$$G(\omega) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \dots (\omega - \omega_m)$$

basta porre per questo:

$$A(x, \bar{x}) = \sum_1^m{}_i\, \omega_i x_i \bar{x}_i + \sum_{m+1}^n{}_k\, x_k \bar{x}_k \quad ; \quad B(x, \bar{x}) = \sum_1^m{}_i\, x_i \bar{x}_i .$$

Orà è possibile, in infiniti modi, costruire una equazione, con radici tutte reali, nella quale manchi un termine di posto assegnato (purchè i due che lo comprendono abbiano coefficienti diversi da zero e di segno contrario); in particolare potremo fare in modo che si abbia $(AB)_{r+1} = 0$, con $(AB)_r \neq 0$ ed insieme $(AB)_{r+2} \neq 0$, ed anche $(AB)_{r+1} \neq 0$ ed $(AB)_{r+2} = 0$ (ed insieme $(AB)_{r+3} \neq 0$). Ne risulta senz'altro la nostra asserzione. Questo non esclude però, come è ben naturale, che per classi *particolari* di determinanti di Hermite (come ad es., quando anche la forma A non è indefinita) queste condizioni non possano ridursi ad un numero minore.