

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Fisica. — *Le tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra, e la conseguente doppia rifrazione accidentale.* Nota di O. M. CORBINO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. La verifica sperimentale delle teorie dell'elasticità ha condotto finora a due difficoltà: mentre, invero, tolti pochi casi semplicissimi, le forze esterne vengono d'ordinario esercitate in modo discontinuo lungo i punti della superficie, non è poi in generale accessibile alla esperienza la prevista distribuzione delle tensioni o delle deformazioni all'interno del corpo.

La prima difficoltà è eliminata con quelle particolari deformazioni considerate dal prof. Volterra nella sua Memoria: *Sull'equilibrio dei corpi elastici a connessioni multiple*, poichè è allora possibile creare nel corpo un sistema di deformazioni o di tensioni non semplici senza l'intervento di forze esterne.

Le previste variazioni di forma furono in realtà constatate con anelli cilindrici di caoutchouc che, dopo asportazione di una parte di sostanza, venivano rincollati sulle facce del taglio. È naturale quindi l'idea di esaminare più a fondo le conseguenze della teoria, servendosi d'un corpo elastico trasparente, come la gelatina, e studiando per mezzo della birifrangenza accidentale acquistata la distribuzione delle tensioni create dalle distorsioni.

Perchè la previsione teorica degli effetti osservabili possa farsi completamente, sarà vantaggioso supporre che un anello di piccola altezza, dopo un *taglio radiale o parallelo*, e la rincollatura delle due facce del taglio, sia esaminato in luce polarizzata parallela, *propagantesi nel senso dell'asse del cilindro*. Le figure che si ottengono allora, osservando attraverso ad un nicol, o proiettando su uno schermo e attraverso un analizzatore l'immagine dell'anello, permettono un controllo molto rigoroso della teoria nella parte più interessante di questa, relativa alle tensioni esistenti nel piano xy normale all'asse del cilindro.

Nella Memoria del prof. Volterra son date già le espressioni analitiche di queste tensioni. Sarà appunto oggetto di questa Nota l'esame delle formole fondamentali, e la loro interpretazione relativamente agli effetti di birifrangenza che accompagnano le distorsioni, per poter procedere al confronto coi risultati delle esperienze eseguite su mio consiglio dal sig. Trabacchi, il quale, superando notevoli difficoltà tecniche, è riuscito a confermare anche nei più imprevedibili particolari le conseguenze della teoria.

2. Le formole del prof. Volterra, relative al taglio radiale e al taglio parallelo, danno per ogni punto x, y dell'anello le tensioni t_{11}, t_{22} parallele a due assi fissi, e la tensione di scorrimento t_{12} . Da queste si passa imme-

diatamente alle dilatazioni γ_{11}, γ_{12} nel senso degli assi e allo scorrimento γ_{12} , in virtù delle relazioni:

$$(1) \quad t_{11} = L\Theta + 2K\gamma_{11} \quad , \quad t_{22} = L\Theta + 2K\gamma_{22} \quad , \quad t_{12} = K\gamma_{12}$$

ove Θ è la dilatazione cubica; ed L e K sono le due costanti elastiche del corpo.

D'altra parte se indichiamo con γ'_{11} e γ'_{12} le dilatazioni *principali* in ciascun punto del corpo (nel senso degli assi principali della deformazione, variabili da punto a punto), la birifrangenza \mathcal{A} in quel punto è proporzionale alla differenza $\gamma'_{11} - \gamma'_{12}$, come risulta da tutte le esperienze sulla doppia rifrazione accidentale. Ora chiamando α l'angolo formato dagli assi principali di cui sopra con gli assi fissi, la direzione degli assi principali è data punto per punto, da

$$(2) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\gamma_{12}}{\gamma_{11} - \gamma_{12}}$$

ovvero per le (1), da

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{t_{12}}{\frac{1}{2}(t_{11} - t_{12})}$$

Per la birifrangenza \mathcal{A} avremo analogamente, indicando con A una quantità costante per una data lamina,

$$\mathcal{A} = A(\gamma'_{11} - \gamma'_{12})$$

Ma

$$(\gamma'_{11} - \gamma'_{22})^2 = (\gamma_{11} - \gamma_{22})^2 + \gamma_{12}^2$$

e quindi misurando \mathcal{A} con una conveniente unità

$$(4) \quad \mathcal{A}^2 = \frac{1}{4}(t_{11} - t_{22})^2 + t_{12}^2$$

Si ottiene con ciò questo risultato, di cui è evidente la connessione con la teoria delle coniche: in un triangolo rettangolo (fig. 1), avente per ca-

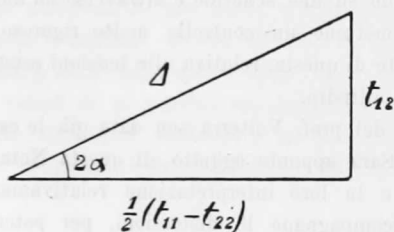


FIG. 1.

teti t_{12} , e $\frac{1}{2}(t_{11} - t_{22})$ l'angolo opposto al primo è eguale a 2α , e determina così punto per punto la direzione della birifrangenza, mentre l'ipotenusa misura l'intensità della birifrangenza medesima.

Supponiamo adesso di disporre la lamina tra due polarizzatori incrociati, e sia φ l'angolo formato dalla sezione principale del polarizzatore con

la direzione x lungo la quale fu eseguito il taglio. L'intensità I della luce emergente da ciascun punto della lamina sarà data da

$$I^2 = \text{sen}^{22}(\alpha - \varphi) \text{sen}^2(hA)$$

ove h è una costante che dipende, per una data lamina, dalla lunghezza d'onda della luce impiegata.

Si osserverà quindi un sistema di linee, assolutamente nere, passanti per tutti i punti ove

$$(5) \quad \text{sen } 2(\alpha - \varphi) A = 0$$

e quindi le equazioni delle linee nere saranno

$$(6) \quad A = 0$$

per qualunque valore di φ , e

$$(7) \quad \text{sen } 2(\alpha - \varphi) = 0$$

per qualunque valore di A .

L'ultima relazione per $\varphi = 0$ diviene, per la proprietà messa in chiaro dalla fig. 1,

$$(8) \quad t_{12} = 0$$

e per $\varphi = 45^\circ$,

$$(9) \quad t_{11} - t_{22} = 0$$

Adunque le linee nere osservate con polarizzatori incrociati, di cui l'uno diretto secondo la linea del taglio corrispondono all'equazione (8), e le altre osservate quando il taglio è a 45° dai polarizzatori corrispondono all'equazione (9).

3. *Caso del taglio radiale.* — Dalle formule del Volterra si ricava per questo caso:

$$t_{12} = a \frac{xy}{r^2} \left[1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2) \frac{1}{r^2}}{R_1^2 - R_2^2} \right]$$

$$t_{11} - t_{22} = a \frac{y^2 - x^2}{r^2} \left[1 - \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2) \frac{1}{r}}{R_1^2 - R_2^2} \right]$$

ove a è una costante, r la distanza del punto x, y dal centro; R_1 ed R_2 il raggio esterno e l'interno dell'anello cilindrico.

La (3) ci dà, ponendo $\frac{y}{x} = \text{tg } \vartheta$,

$$(10) \quad \text{tg } 2\alpha = \text{tg } 2\vartheta$$

cioè in ogni punto il raggio vettore e la sua normale sono gli assi principali della dilatazione; e la direzione dell'asse di birifrangenza coincide con una di quelle rette.

Osservando tra polarizzatori incrociati si avrà una linea nera, per qualunque orientazione della lamina, nei punti ove

$$A = 0$$

cioè ov'è insieme

$$t_{11} - t_{22} = 0, t_{12} = 0$$

e perciò l'equazione di quella linea sarà

$$r^2 = \frac{R_1^2 R_2^2 (\log R_1^2 - \log R_2^2)}{R_1^2 - R_2^2}$$

che rappresenta una circonferenza di raggio

$$r = R_1 R_2 \sqrt{\frac{\log R_1^2 - \log R_2^2}{R_1^2 - R_2^2}}$$

Inoltre si avranno delle altre linee nere corrispondenti all'equazione (7), che per la (10) diviene:

$$\vartheta = \varphi + m \frac{\pi}{2}$$

ove m è un numero intero qualsiasi.

Si avrà quindi un cerchio ed una croce, con le braccia parallele alle sezioni principali dei polarizzatori; orientando comunque la lamina nel suo piano il cerchio persisterà, e la croce conserverà le sue braccia permanentemente orientate secondo le sezioni principali dei polarizzatori incrociati.

Si noti infine che la circonferenza lungo la quale la lamina resta priva di birifrangenza ($\mathcal{A} = 0$) non coincide con la *fibra neutra* del Volterra, com'era del resto prevedibile, poichè quest'ultima è definita da condizioni diverse.

4. *Caso del taglio parallelo.* — Dalle formole del Volterra relative a questo caso, trasformandole in coordinate polari, e denotando con a, b, c, d, e , i coefficienti indipendenti dalle coordinate del punto che successivamente s'incontrano nella formola che dà t_{12} , si ottiene con dei calcoli facili:

$$t_{12} = \frac{a}{r} \sin \vartheta \left\{ b - 1 + 2c(4 \cos^2 \vartheta - 1) \left(1 - \frac{2d}{r^2} \right) + er^2 \right\}$$

$$t_{11} - t_{22} = \frac{a}{r} \cos \vartheta \left\{ b - 1 - 2c(4 \sin^2 \vartheta - 1) \left(1 - \frac{2d}{r^2} \right) + er^2 \right\}$$

nelle quali a contiene l'ampiezza del taglio; a, b, c , le costanti elastiche del corpo; d i raggi R_1 e R_2 dell'anello, e le costanti elastiche e i raggi.

Nel caso della gelatina si può porre il coefficiente di Poisson eguale a $\frac{1}{2}$; e allora quei coefficienti divengono

$$b = 0, c = \frac{1}{2}, d = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 + R_2^2}, e = \frac{2}{R_1^2 + R_2^2}$$

Esaminando la lamina tra polarizzatori incrociati, essendo la direzione del taglio parallela o normale al piano di polarizzazione, si osserveranno delle linee corrispondenti all'equazione

$$t_{12} = 0$$

la quale dà due linee: una corrispondente a

$$\text{sen } \vartheta = 0$$

che rappresenta la direzione del taglio; l'altra all'equazione in r e ϑ :

$$r^4 + 2e_1^2 \cos 2\vartheta r^2 - (1 + 2 \cos 2\vartheta) e^4 = 0$$

ove si è posto

$$e_1^2 = \frac{R_1^2 + R_2^2}{2}, e^2 = R_1 R_2.$$

Denotiamo con ε il rapporto tra il raggio esterno $R_1 = R$ e l'interno R_2 ; e risolviamo la precedente equazione rispetto a r^2 . Si otterrà:

$$(11) \quad r^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} R^2 \left[\sqrt{\cos^2 2\vartheta + (1 + 2 \cos 2\vartheta) \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2}} - \cos 2\vartheta \right].$$

Si riconosce subito che la curva che rappresenta r in funzione di ϑ è simmetrica rispetto agli assi. Essa è stata costruita per punti, nella fig. 2, ammettendo che sia $\varepsilon = 2, 5$, condizione prossima a quella realizzata nelle esperienze. Per $\vartheta = 90^\circ$ si ha, qualunque sia ε ,

$$r = R$$

e la curva risulta in quel punto tangente al cerchio esterno.

Una seconda soluzione, corrispondente al valore negativo del radicale, dà valori di r in generale minori del raggio interno dell'involucro, e che perciò non hanno alcun significato per noi; ma per $\vartheta = 90^\circ$ vi corrisponde un valore $r = R_1$, cosicchè anche i punti M, N soddisfano alla condizione $t_{12} = 0$.

Orientando il taglio della lamina a 45° dai polarizzatori, le linee nere corrispondono all'equazione

$$t_{11} - t_{22} = 0$$

che definisce una retta

$$\cos \vartheta = 0$$

normale alla linea del taglio, e una curva che ha per equazione

$$r^4 - 2e_1^2(1 - \cos 2\vartheta) r^2 + (1 - 2 \cos 2\vartheta) e^4 = 0.$$

Questa risolta rispetto a r^2 dà:

$$(12) \quad r^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{2\varepsilon^2} R^2 \left[\sqrt{(1 - \cos 2\vartheta)^2 + (-1 + 2 \cos 2\vartheta) \frac{4\varepsilon^2}{(1 + \varepsilon^2)^2}} + 1 - \cos 2\vartheta \right]$$

È notevole che questa relazione si ottiene dalla precedente (11) sostituendo $\cos 2\vartheta - 1$ al posto di $\cos 2\vartheta$. Lo stesso può dirsi per $\frac{t_{12}}{\text{sen } \vartheta}$ e $\frac{t_{11} - t_{22}}{\cos \vartheta}$.

Questo permette di stabilire una corrispondenza grafica semplicissima tra gli angoli per i quali le due curve possiedono il medesimo raggio vettore. Al valore $\vartheta = AB$ (fig. 3) corrisponda un certo valore ρ del raggio vettore nella curva (11). Preso $BC = AB$, e condotta CD normalmente a OA , l'arco OC' , nel cerchio di centro O' , è il doppio dell'arco ϑ' cui cor-

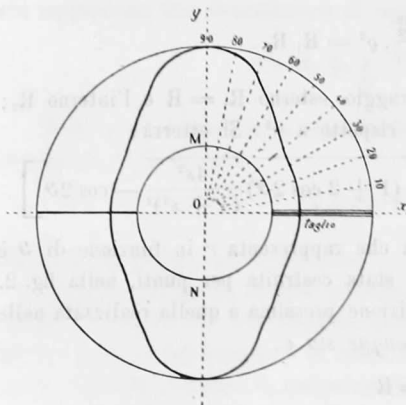


FIG. 2.

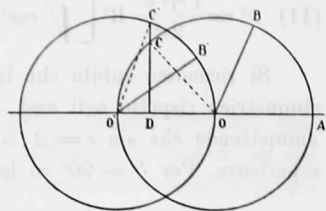


FIG. 3.

risponde nella curva (12) il medesimo valore ρ del raggio vettore. Naturalmente la legge di corrispondenza permette il passaggio inverso.

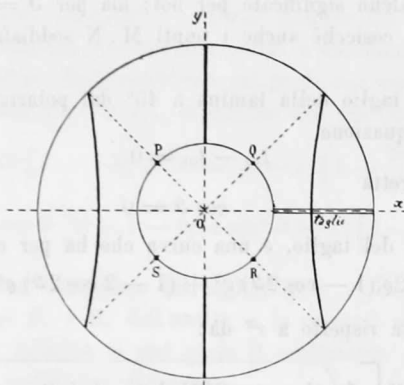


FIG. 4.

Se ne deduce che la curva (12) s'inizia, per $\vartheta = 0$, con un valore del raggio vettore eguale a quello della curva (11) per $\vartheta = 45$, e che aumentando ϑ , il raggio stesso aumenta fino a divenire R (raggio del cerchio esterno) per $\vartheta = 45^\circ$. Al di là di 45° la curva non si svolge più; e poichè essa dev'essere simmetrica rispetto ai due assi, sarà compresa a destra e a sinistra tra due rette formanti con l'asse x gli angoli $+45$ e -45 (fig. 4).

Per $\vartheta = 45$ si hanno ancora qui le soluzioni singolari $r = R_1$ corrispondenti ai punti PQRS della figura, analoghi ai punti M, N della fig. 2.

Le due curve (10) e (11) e gli assi x e y dividono la lamina in sei regioni; passando dall'una alla contigua s'inverte il segno di t_{12} o $t_{11} - t_{22}$. Se ne può arguire la distribuzione generale della direzione e dell'intensità della birifrangenza.

I due sistemi di linee, insieme considerati, danno nella loro parte comune i punti ove è contemporaneamente

$$t_{11} - t_{22} = 0 \quad . \quad t_{12} = 0$$

cioè:

$$A = 0.$$

Or le due curve (11), (12) non hanno alcun punto comune, com'è facile riconoscere, poichè è sempre $\varepsilon > 1$. Adunque la lamina non possiede alcuna linea neutra, o sprovvista di birifrangenza, ma solo sei punti neutri; e precisamente i punti d'incontro della curva (11) con l'asse x del taglio.

È questo un risultato veramente notevole.

Le quattro regioni in cui, secondo la figura del Volterra, si divide l'anello, e dentro le quali la sostanza è alternativamente compressa e dilatata, si comportano ben diversamente nei riguardi della birifrangenza; nè c'è da sorprendersi di questa apparente contraddizione, poichè il Volterra si occupa della complessiva dilatazione cubica nelle quattro regioni, mentre la birifrangenza dipende dalla differenza delle dilatazioni principali nel piano xy .

Un calcolo analogo bisognerebbe eseguire, introducendo oltre alle t , finora considerate, anche la t_{33} nel senso z , per interpretare correttamente le esperienze del Rolla, in cui si osservava attraverso tubi affondati nel cilindro di gelatina e paralleli al piano xy la doppia rifrazione rispetto alla luce che si propaga a 45° dal taglio e normalmente all'asse z .

La direzione della birifrangenza in ciascun punto è data per la (3), da

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \vartheta \frac{r^2 + 2\varrho^2(\cos^2 \vartheta - 1)r^2 - (4\cos^2 \vartheta - 1)\varrho^4}{r^4 - 4\varrho^2 \sin^2 \vartheta r^2 + (4\sin^2 \vartheta - 1)\varrho^4}.$$

Questa equazione, per ciascun valore di $\operatorname{tg} 2\alpha$, definisce in r, ϑ una curva, che potrebbe chiamarsi una isogonica, e che riunisce tutti i punti ove la direzione di birifrangenza è ugualmente inclinata rispetto alla linea del taglio. Così le (10) e (11) rappresentano la isogoniche per $\alpha = 0$, e per $\alpha = 45^\circ$. Sperimentalmente, se i polarizzatori fanno l'angolo φ col taglio, le linee nere ottenute saranno le isogoniche relative all'angolo $\alpha = \varphi$.

Per $\vartheta = 90^\circ$ la precedente relazione dà il risultato già riferito, che cioè lungo la retta normale alla linea del taglio la lamina è birifrangente, con l'asse diretto a 45° dalla linea medesima.

La (4), per $A = \text{costante}$, definisce un sistema di linee lungo le quali la birifrangenza ha lo stesso valore. Ma la discussione di questa complicata equazione non è agevole.

Tutto quanto precede presuppone che siano realizzate le condizioni in cui son valide le formole del Volterra, da cui abbiamo preso le mosse; che perciò il taglio sia molto piccolo, e che le basi siano tenute piane e alla distanza di prima. È chiaro però che osservando la luce nel senso dell'asse s , come abbiamo ammesso, le forze che devono essere applicate sulle basi per tenerle piane, e alla distanza normale, non avranno grande influenza sugli effetti osservati, specialmente se l'anello si riduce, nel senso s , a una fetta di piccola altezza.

E in verità l'esperienza ha confermato tutti i particolari sopra previsti, senza che occorresse tenere l'anello tra due laminette di vetro, che ne rendessero assolutamente piane le basi e alla distanza primitiva.

Fisica. — I fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti dalle tensioni create in un corpo elastico dalle distorsioni di Volterra (1). Nota di G. C. TRABACCHI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Per osservare i fenomeni di doppia rifrazione accidentale prodotti in un anello trasparente dalle distorsioni del Volterra, seguendo la via tracciata dalle notevoli deduzioni del Corbino, serve bene la gelatina, ma è necessario avere delle cure speciali nella preparazione dell'anello e nel modo di sperimentare. Due sono i requisiti a cui deve rispondere il mezzo adoperato: avere le proprietà elastiche ammesse dalla teoria ed una sufficiente trasparenza.

Ripetute esperienze mi hanno condotto ad operare nel modo seguente:

Prendo della gelatina in foglietti della migliore qualità e la immergo in acqua fredda contenente tracce di acido fenico: qui la gelatina si gonfia; dopo circa 10 minuti getto via tutto il liquido rimasto e metto la gelatina che si è rammollita in un recipiente di vetro tenuto a circa 60°, in un bagno d'acqua. Qui la gelatina si scioglie, e quando ciò è avvenuto, la filtro attraverso parecchi strati di garza in un imbuto riscaldato a vapore. Si ha così una gelatina che si rapprende rapidamente e soddisfa sufficientemente alle proprietà richieste: la sua trasparenza permette di leggere comodamente uno stampato bene illuminato anche attraverso uno spessore di cm. 5. Si noti che la presenza di un antisettico, come l'acido fenico, è necessaria, perchè i

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Fisico di Roma.