ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Ecco a titolo di esempio i valori di questa resistenza R al variare della temperatura t per una lastrina di Se amorfo su vetro delle dimensioni: 5 mm di lunghezza (nel senso cioè della corrente), 2 cm. di larghezza e $^1/_{20}$ di mm. di spessore, lastrina che potè essere portata fino a 200° senza che si screpolasse (R è espressa in megaohm):

t	R	t	R	t	R	t	R	t	R	t	R	t	R	t	R
80	∞	108	400	119	72	142	32	152	28	165	28	180	24	190	13
90	∞	111	200	123	40	146	27	156	27	170	28	181	21	197	8
100	∞	117	95	133	39	150	27	159	27	176	26	183	19	201	5

La velocità del riscaldamento fu di circa 4°,5 al minuto primo.

Si vede così che il presentarsi di una conducibilità apprezzabile comincia gradatamente un po' prima della temperatura alla quale si ha la massima differenza di temperatura fra Se e bagno; in corrispondenza all'infittire delle fibrille nere che determinano l'opacità del preparato la resistenza va gradatamente diminuendo; poi per un certo tempo si mantiene costante sensibilmente, forse perchè il coefficiente termico del Se conduttore che va formandosi è in tali condizioni positivo; poi ricomincia a diminuire, ma più lentamente di prima. Al di sopra di 200° è impossibile ottenere che la lastrina di Se non presenti soluzioni di continuità.

Quest'andamento sembrerebbe appoggiare l'ipotesi del Lehmann il quale ammette pel Se due forme cristalline grigie di diversa conduttività elettrica, delle quali la prima a formarsi sarebbe quella relativamente più conduttrice e corrisponderebbe alla prima delle trasformazioni ricordate, l'altra meno buona conduttrice si formerebbe poco sopra i 200°.

Fisica. — *Sui campioni di autoinduzione toroidali, e sul loro profilo di minima resistenza*. Nota del dott. P. Barreca, presentata dal Socio V. Volterra.

I.

Scopo della presente Nota è di proporre l'uso di cassette di autoinduzione cioè di collezioni campionate di autoinduttori dei quali mediante caviglie se ne possano mettere in circuito quanti si vogliano. Se si disponessero in serie campioni del tipo fino adesso adoperato (bobine cilindriche senza ferro a gola quadrata), l'uso pratico della cassetta sarebbe pressocchè impossibile a causa della complicazione dovuta alle numerose induzioni mutue; con sole 6 spine estratte, si avrebbero ad esempio 21 termini da sommare per conoscere il valore della a. i. direttamente inserita. Inoltre le bobine con caviglia non estratta si comporterebbe come secondarî corto-circuitati di trasformatore cioè reagirebbero dannosamente sulle bobine utilizzate; a questo ultimo inconveniente si potrebbe però ovviare facilmente.

Elimineremo le mutue induzioni usando autoinduttori toroidali. Conserveremo invariata la resistenza ohmica al variare dell'a. i. mediante opportuno dispositivo e ad esempio quello della fig. 1; le caviglie collocate in uno solo dei due fori che stanno di fronte (destro o sinistro) sostituiranno ad ogni toro una resistenza bifilare r uguale (per costruzione) alla resistenza del primo.

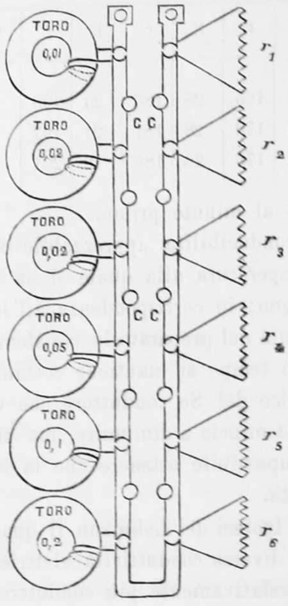

Fig. 1.

Le coppie di serrafili intermedî CC permetteranno di utilizzare eventualmente solo una parte della cassetta, diminuendo la res. ohmica costante complessiva. L'istrumento servirà per frequenze ordinarie industriali e telefoniche e per coefficienti di media grandezza (da millihenry a qualche henry). Gli avvolgimenti saranno in costantana o manganina ed i nuclei dei tori in serpentino o meglio in mogano perchè siano interamente esenti da probabili traccie di ferro e riescano più leggieri. Questi avranno superficie non levigata affinchè il filo metallico (rivestito) mantenga la propria posizione aiutato da immersione in lacca o paraffina. Sarà difficile ottenere mediante aggiustaggi che il coefficiente di ogni singolo toro sia espresso da un numero a unica cifra significativa; ci contenteremo di incidere sul coperchio il suo valore esatto (non molto diverso da quello perchè potranno predeterminarsi le dimensioni del toro ed il numero conveniente di spire prima della taratura definitiva).

Infine il toro potrebbe essere profilato secondo una curva speciale di minima resistenza di cui qui appresso; ma per lo più la diminuzione di resistenza ohmica che così si ottiene non è (come risulterà da un es.) notevole in confronto al profilo circolare ed a quello formato da un rettangolo sormontato da due semicerchi (colle basi normali all'asse del toro), questo ultimo quando non si vuole eccedere nelle dimensioni esterne.

II.

Ricerca del profilo ottimo della sezione.

Supposto di fissare a criterio il diametro interno e l'esterno di un toro da costruire e supposto di volere impiegare in ogni spira una certa lunghezza di filo metallico di una certa qualità, non è naturalmente indifferente adottare per la spira una piuttosto che un'altra forma geometrica.

Vi sarà tra tutte una forma ottima che darà la massima autoinduzione oppure (se così vuolsi) che per data autoinduzione avrà la minima resistenza ohmica e perciò (senza accrescere lo spessore del filo) renderà i metodi di misura più sensibili. Cerchiamo tale curva.

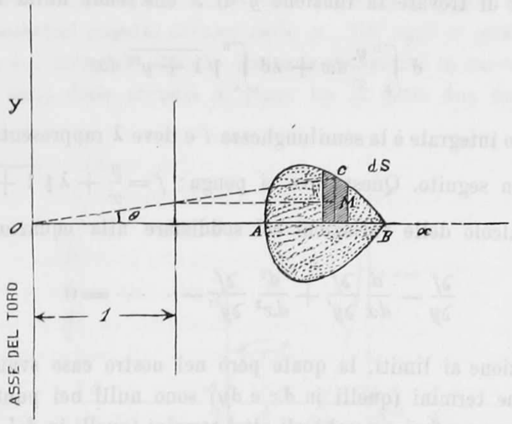

FIG. 2.

Il reciproco della riluttanza del nucleo deve essere massimo; esso vale coi simboli della fig. 2:

$$\int \frac{dS}{2\pi x} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{y}{x} dx = \frac{1}{2\pi}\int \tang\theta \,.\, dx$$

calcolando l'integrale lungo tutto il contorno. Il coefficiente di a. i. sarebbe poi $2n^2 \int \tang \theta \, dx$ se n sono le spire dell'avvolgimento ([1]).

Portando il punto A a coincidere con O, si scorge che (per qualunque profilo avente ivi, lungo un certo tratto, ordinate non nulle) il toro diverrebbe infinitamente vantaggioso ed il problema proposto cesserebbe di aver senso. D'altra parte tale caso non presenta interesse perchè se A è troppo vicino ad O la periferia interna del toro diventa troppo più corta dell'esterna e non potranno allogarvisi che poche spire nonostante lo sviluppo delle sue dimensioni esterne.

([1]) Questo offre una valutazione grafica dell'a. i. dei tori a sezione data qualsiasi. Si proiettino tutti i punti C del contorno dal centro O del toro e poi le intersezioni del fascio proiettante con la verticale di ascissa 1 si proiettino orizzontalmente in M sulle rispettive ordinate. Si planimetri l'area racchiusa dai punti M e la si moltiplichi per $2n^2$: il coeff. risulterà in cm. se l'area fu misurata in cm^2 e se la distanza unitaria era 1 cm.

Supponiamo dunque dato (scelto a criterio) anche OA e così il problema diviene:

Dati i punti O, A, B, *ed una lunghezza* l *di filo colla quale si vuole fare il contorno, trovare la forma della curva che rende massimo* $\int_A^B \operatorname{tang} \theta \, dx$.

Si tratta di trovare la funzione y di x che rende nulla la variazione:

$$\delta \int_A^B \frac{y}{x} \, dx + \lambda \delta \int_A^B \sqrt{1 + y'^2} \, dx$$

dove il secondo integrale è la semilunghezza l e dove λ rappresenta una costante da valutare in seguito. Questo ove si ponga: $f = \frac{y}{x} + \lambda \sqrt{1 + y'^2}$ si ottiene secondo il Calcolo delle variazioni col soddisfare alla equazione indefinita:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots\ldots = 0$$

ed alla equazione ai limiti, la quale però nel nostro caso svanisce perchè i primi suoi due termini (quelli in δx e δy) sono nulli nei punti A e B che il problema suppone fissi e perchè gli altri termini (quelli in $\delta y'$, $\delta y''$,...) hanno coefficienti nulli non contenendo la f derivate superiori a y'. Nel nostro caso l'equazione indefinita diviene:

$$\frac{1}{x} = \frac{d}{dx} \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}}$$

cioè:

$$\log x - \log \mathrm{K} = \frac{\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \tag{1}$$

dove $-\log \mathrm{K}$ è una costante arbitraria positiva o negativa. Di qui:

$$y = \int \frac{\log \frac{x}{\mathrm{K}}}{\sqrt{\lambda^2 - \log^2 \frac{x}{\mathrm{K}}}} \, dx + \mathrm{C}$$

e rimarranno da fissare le tre costanti K, λ, C; cerchiamone il significato e facciamo qualche altra considerazione. Per brevità, chiamiamo verticali le parallele all'asse del toro.

L'espressione dopo il segno integrale si annulla solamente per $x = \mathrm{K}$ e perciò K è l'unica ascissa per cui la tangente al profilo sia orizzontale; è positiva come ogni x. La medesima espressione diviene infinita per le ascisse $\mathrm{K}e^{+\lambda}$, $\mathrm{K}e^{-\lambda}$ e solo per esse; ivi la tangente è verticale e detta a la più piccola di esse e b l'altra sarà $b = \frac{K^2}{a}$ e risulta $\lambda = \pm \log \frac{a}{K} = \pm \log \sqrt{\frac{a}{b}}$, $K = \sqrt{ab}$.

Inoltre, per il radicale possiamo prendere nell'integrazione o costantemente il segno più oppure il meno e perciò per ogni x vi sono due y uguali ed opposte; esse sono coincidenti là dove il radicale è nullo cioè per le due tangenti verticali considerate. La curva dunque tocca queste ultime e si ripiega con simmetria rispetto all'asse delle x. Per ogni x esterno alla coppia di valori a e b l'integrale diviene immaginario, sicchè la curva non ha punti (reali) al di fuori della striscia di piano tra le dette due tangenti.

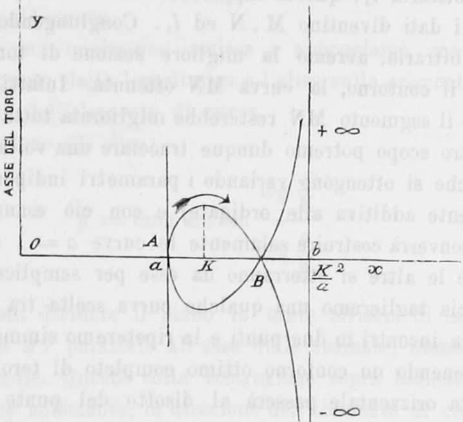

FIG. 3.

Ne segue che a è il diametro interno del toro (se non si adotta un artificio di cui più sotto). La fig. 3 rappresenta una curva soddisfacente a quanto sopra e copiata da altre che ho costruito effettivamente come è detto in appresso.

Inoltre la proprietà delle due ascisse a e b di avere per prodotto K^2 è un caso di una più generale, perchè ad ogni coppia di ascisse che ha per prodotto K^2 corrispondono tangenti simmetricamente inclinate rispetto agli assi coordinati.

Abbandoniamo la curva completa simmetrica rispetto all'asse delle x che per noi è superflua e prendiamo per il radicale il solo segno positivo. Nella metà curva che così riteniamo, quando facciamo crescere x a partire dal valore a per eseguire l'integrazione e calcolare la y veniamo a percorrere la curva nel senso della freccia, e perciò rispetto all'asse delle x la tangente avrà un seno direttore sen α che tra a e K sarà positivo, e da K in poi negativo. Ora, siccome la equazione (1) equivale a:

$$\log \frac{x}{\mathrm{K}} = \lambda \operatorname{sen} \alpha$$

così adesso λ è sempre negativo e occorre scrivere semplicemente:

$$\lambda = \log \frac{a}{\mathrm{K}} = \log \sqrt{\frac{a}{b}}\,.$$

Infine la qualità di ottimo profilo è goduta dalla curva in ogni sua parte, vale a dire che se per alcuni dati del problema abbiamo ottenuto una curva e di questa stacchiamo una porzione con estremi arbitrari MN e lunghezza arbitraria l_1, questa rappresenta la soluzione del problema analogo quando i dati diventino M, N ed l_1. Congiungendo M ad N con una linea fissa arbitraria, avremo la migliore sezione di toro quando useremo, per chiudere il contorno, la curva MN ottenuta. Infatti, se fosse possibile di migliorare il segmento MN resterebbe migliorata tutta la curva primitiva.

Pel nostro scopo potremo dunque tracciare una volta tanto tutte le infinite curve che si ottengono variando i parametri indipendenti a e b (la C è semplicemente additiva alle ordinate) e con ciò esauriremo le possibili curve. Anzi converrà costruire solamente le curve $a = 1$ e per tutti i valori di b; giacchè le altre si otterranno da esse per semplice similitudine geometrica. Poscia taglieremo una qualche curva scelta tra esse con una orizzontale che la incontri in due punti e la ripeteremo simmetricamente intorno a questa, ottenendo un contorno ottimo completo di toro.

Se questa orizzontale passerà al disotto del punto A nel quale tutte le dette curve si arrestano, il contorno rimarrà aperto da quel lato, ma lo completeremo con un segmento di retta verticale la quale ci darà la massima a. i. possibile senza scendere al disotto del diametro interno prefisso del toro.

III.

Costruzione pratica del profilo ottimo.

Prendiamo adesso come dati del problema a, b, C. Da essi troviamo facilmente K e λ e poichè l'espressione di y è adesso divenuta:

$$(2) \qquad y = \int_a^x \frac{\log \frac{x}{\mathrm{K}}}{+\sqrt{\log^2 \frac{a}{\mathrm{K}} - \log^2 \frac{x}{\mathrm{K}}}}\, dx + \mathrm{C}$$

ponendo $\dfrac{\log \frac{x}{\mathrm{K}}}{\lambda} = z$ e poscia $\sqrt{1 - z^2} = u$, otteniamo:

$$y = -\lambda \mathrm{K} \int_0^u e^{\sqrt{1-u^2}}\, du + \mathrm{C}\,.$$

Sviluppando l'esponenziale secondo le potenze di $\lambda\sqrt{1-u^2}$, si ottiene:

$$(3)\qquad -\frac{y-\mathrm{C}}{\lambda\mathrm{K}}=\int_0^u du+\lambda\int_0^u\sqrt{1-u^2}\,du+\frac{\lambda^2}{2!}\int_0^u(\sqrt{1-u^2})^2\,du+\cdots$$

di cui per semplicità non eseguiamo gli integrali che possono trovarsi facilcilmente, sicchè y resta sviluppato in serie.

È forse preferibile e più rapido costruire graficamente la curva con metodi approssimati analoghi alla integrazione grafica. Segnata la curva logaritmica coll'aiuto di tavole a 3 o 4 decimali (sufficienti) dei logaritmi naturali, si tiri l'orizzontale che equidista dai punti di tale curva che hanno come ascisse a e b, poi si segni sull'orlo di una squadretta da disegno, fra due tacche, tale equidistanza.

Se adesso per una qualunque ascissa x appoggiamo una delle tacche sul corrispondente punto della logaritmica e l'altra sulla orizzontale anzidetta avremo la direzione dell'elemento di curva.

Infatti, l'equazione (2) dice:

$$y'=\text{tang arc sen}\,\frac{\log\dfrac{x}{\mathrm{K}}}{\log\dfrac{a}{\mathrm{K}}}.$$

Ciò posto, basta dividere il piano in tante striscie di larghezza sufficientemente piccola Δx parallele all'asse delle ordinate, numerarle e tirare le loro ordinate medie. Queste colla costruzione sopra indicata ci daranno, con approssimazione sufficiente, la direzione dell'elemento di curva compreso nella striscia. Si tirerà allora entro la prima striscia la parallela al primo elemento e dall'estremo di questo la parallela entro la seconda striscia al secondo elemento, ecc. Si otterrà così la curva cercata; gioverà cominciare dal mezzo.

Ad alcuni mm. di distanza dalle due tangenti verticali il tracciato perde la sufficiente precisione e pertanto il punto A d'incontro colla verticale più interna, non può determinarsi con sufficiente esattezza. Lo otterremo calcolando la differenza $y_{\mathrm{K}}-\mathrm{C}$ tra la sua ordinata C e quella y_{K} del vertice della curva.

La (3) quando x varia da $a=1$ a $\mathrm{K}=\sqrt{b}$ acquista per limiti degli integrali 0 ed 1 sicchè $\left(\text{non considerando per un momento i fattori } \dfrac{\lambda^m}{m!}\right)$ ha integrali definiti di tre specie: Il primo che vale 1. Quelli di posto pari cioè contenenti potenze veramente fratte di $(1-u^2)$ e pei quali vale la formola:

$$\int_0^1(1-u^2)^{\frac{n}{2}}\,du=\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\ldots(n-2)\,n}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8\ldots(n-1)\,(n+1)}\,\frac{\pi}{2}\,,\quad n\text{ dispari.}$$

Quelli di posto dispari con irrazionalità apparente, del tipo:

$$\int_0^1 (1-u^2)^n \, du \,, \; n \text{ intero}$$

i quali dànno tante frazioni che valgono in grandezza e segno i coefficienti dello sviluppo binomiale ma moltiplicati per $\frac{1}{m+1}$ se m è il grado che

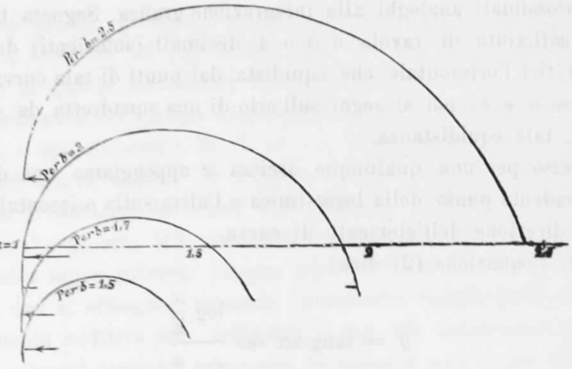

Fig. 4.

nel relativo termine avrebbe avuto la u. Avremo dunque:

$$-\frac{y_K - C}{K} = \lambda + \frac{\lambda^3}{2!}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{\lambda^5}{4!}\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) + \frac{\lambda^7}{6!}\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{\pi}{2}\lambda \left\{ \frac{\lambda}{1!}\frac{1}{2} + \frac{\lambda^3}{3!}\frac{1.3}{2.4} + \frac{\lambda^5}{5!}\frac{1.3.5}{2.4.6} + \frac{\lambda^7}{7!}\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \cdots \right\}$$

convergente abbastanza, dove $\lambda = -\frac{1}{2}\log b$ è sempre negativo ed il più delle volte minore di uno in valore assoluto; si può misurarlo sulla quadretta sulla quale era stato segnato o meglio calcolarlo. Pei calcoli ordinarî:

$$-\frac{y_K - C}{K} = \lambda + 0{,}7854\,\lambda^2 + 0{,}3333\,\lambda^3 + 0{,}0982\,\lambda^4 + 0{,}0222\,\lambda^5 + \cdots$$

La fig. 4 contiene alcune curve così costruite. Se si paragona in ciascuna un pezzo (preso opportunamente) col semicerchio di uguale lunghezza e medesimi estremi, si trova che i due coefficienti di a. i. differiscono di poco (3 % circa nella curva più grande e meno nelle altre). Siccome conviene (dopo aver fissato il raggio interno ed esterno del toro) scegliere una lunghezza di semispira uguale o superiore a quella del relativo semicerchio, così in pratica, per amore di semplicità si potrà profilare secondo semicerchi e rettangoli sormontati da due semicerchi. Le piccole freccie indicano i punti in cui cominciano i tratti rettilinei.