ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Contributo alla teoria di certe equazioni funzionali.* Nota del dott. U. CRUDELI, presentata dal Socio VALENTINO CERRUTI.

Sia l'equazione

$$(1)\qquad \varphi(y) - z\int_a^b \left\{ A(x\,,y)\,\frac{d\varphi(x)}{dx} + B(x\,,y)\,\varphi(x)\right\} dx = f(y)\quad (b>a),$$

studiata dai sigg. Fubini [1] e Lauricella [2] nel caso $z=1$, dove z è un parametro ausiliario indipendente, φ la funzione incognita, e dove il cammino (ab) del campo reale è costante. Le funzioni note, nella (1), siano finite e la loro natura sia tale da rendere lecite le operazioni, che verranno eseguite nel corso delle nostre dimostrazioni.

Nella suddetta ipotesi, la (1) ammette, entro un certo campo del parametro z, una soluzione, la quale è funzione regolare del parametro in discorso.

Supponiamo che una tale soluzione esista. Avremo, denotandola con Φ,

$$[\Phi(y)]_{z=0} = f(y),$$

e, derivando la (1) rispetto a z, e, poi, ponendovi $z=0$,

$$\left[\frac{d\Phi(y)}{dz}\right]_{z=0} = \int_a^b \left\{ A(x\,,y)\left[\frac{d\Phi(x)}{dx}\right]_{z=0} + B(x\,,y)\left[\Phi(x)\right]_{z=0}\right\} dx,$$

ovvero

$$(2)\qquad \left[\frac{d\Phi(y)}{dz}\right]_{z=0} = \int_a^b \left\{ A(\xi\,,y)\,\frac{df(\xi)}{d\xi} + B(\xi\,,y)\,f(\xi)\right\} d\xi\,,$$

ξ essendo compresa fra a e b.

Avremo, poi, derivando due volte la (1) rispetto a z, e facendovi $z=0$,

$$\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0} = 2\int_a^b \left\{ A(x\,,y)\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{d\Phi(x)}{dx}\right)\right]_{z=0} + B(x\,,y)\left[\frac{d\Phi(x)}{dz}\right]_{z=0}\right\} dx,$$

ovvero

$$\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0} = 2\int_a^b \left\{ A(x\,,y)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{d\Phi(x)}{dz}\right]_{z=0} + B(x\,,y)\left[\frac{d\Phi(x)}{dz}\right]_{z=0}\right\} dx,$$

dove la $\left[\frac{d\Phi(x)}{dz}\right]_{z=0}$ si calcola mediante la (2), ponendovi $y=x$.

[1] Fubini, Bollettino dell'Accad. Gioenia (1905, fasc. LXXXIII).
[2] Lauricella, Atti R. Accad. dei Lincei (21 giugno 1908, pag. 775).

Seguitando a derivare la (1), si potrebbero avere le derivate successive della Φ. Resulta facilmente che

$$(3)\qquad \left[\frac{d^{n+1}\Phi(y)}{dz^{n+1}}\right]_{z=0} =$$
$$= (n+1)\int_a^b \left\{ A(x,y)\,\frac{d}{dx}\left[\frac{d^n\Phi(x)}{dz^n}\right]_{z=0} + B(x,y)\left[\frac{d^n\Phi(x)}{dz^n}\right]_{z=0}\right\} dx$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Potremo anche scrivere

$$\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0} = 2\int_a^b\int_a^b A(x,y)\,A'(\xi,x)\,\frac{df(\xi)}{d\xi}\,d\xi\,dx +$$
$$+ 2\int_a^b\int_a^b A(x,y)\,B'(\xi,x)\,f(\xi)\,d\xi\,dx +$$
$$+ 2\int_a^b\int_a^b B(x,y)\,A(\xi,x)\,\frac{df(\xi)}{d\xi}\,d\xi\,dx +$$
$$+ 2\int_a^b\int_a^b B(x,y)\,B(\xi,x)\,f(\xi)\,d\xi\,dx,$$

dove

$$A'(\xi,x) = \frac{\partial A(\xi,x)}{\partial x}$$
$$B'(\xi,x) = \frac{\partial B(\xi,x)}{\partial x}.$$

Ovvero potremo scrivere

$$\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0} = 2\int_a^b \left\{ A_1(x,y)\,\frac{df(x)}{dx} + B_1(x,y)\,f(x)\right\} dx,$$

dove

$$A_1(x,y) = \int_a^b \left\{A'(x,\xi)\,A(\xi,y) + A(x,\xi)\,B(\xi,y)\right\} d\xi,$$
$$B_1(x,y) = \int_a^b \left\{B'(x,\xi)\,A(\xi,y) + B(x,\xi)\,B(\xi,y)\right\} d\xi.$$

Talchè

$$\left[\frac{d^{n+1}\Phi(y)}{dz^{n+1}}\right]_{z=0} = (n+1)!\int_a^b \left\{ A_n(x,y)\,\frac{df(x)}{dx} + B_n(x,y)\,f(x)\right\} dx,$$

essendo

$$A_n(x,y) = \int_a^b \left\{A'_{n-1}(x,\xi)\,A(\xi,y) + A_{n-1}(x,\xi)\,B(\xi,y)\right\} d\xi,$$
$$B_n(x,y) = \int_a^b \left\{B'_{n-1}(x,\xi)\,A(\xi,y) + B_{n-1}(x,\xi)\,B(\xi,y)\right\} d\xi,$$

dove è manifesto il significato dei simboli.

Siano, nel dato intervallo (ab), le funzioni $A(x,y)$, $B(x,y)$, $\frac{\partial A(x,y)}{\partial y}$, $\frac{\partial B(x,y)}{\partial y}$, $f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$ inferiori, in valore assoluto, ad un determinato numero finito M.

Avremo, allora, nel campo in discorso,

$$
\begin{aligned}
|A_1(x\,,y)| &< 2M^2(b-a)\\
|B_1(x\,,y)| &< 2M^2(b-a)\\
|A_1'(x\,,y)| &< 2M^2(b-a)\\
|B_1'(x\,,y)| &< 2M^2(b-a)\\
|A_2(x\,,y)| &< 2^2M^3(b-a)^2\\
|B_2(x\,,y)| &< 2^2M^3(b-a)^2\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
|A_n(x\,,y)| &< 2^nM^{n+1}(b-a)^n\\
|B_n(x\,,y)| &< 2^nM^{n+1}(b-a)^n\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

Talchè

$$
\begin{aligned}
\left|\left[\frac{d\Phi(y)}{dz}\right]_{z=0}\right| &< 2(b-a)\,M^2\\
\left|\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0}\right| &< 2!\,2^2(b-a)^2\,M^3\\
\left|\left[\frac{d^3\Phi(y)}{dz^3}\right]_{z=0}\right| &< 3!\,2^3(b-a)^3\,M^4\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\left|\left[\frac{d^n\Phi(y)}{dz^n}\right]_{z=0}\right| &< n!\,2^n(b-a)^n\,M^{n+1}\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}
$$

Ora, indichiamo con ϱ il modulo di z e consideriamo la serie

$$
\begin{aligned}
&M+2(b-a)\,M^2\varrho+2^2(b-a)^2\,M^3\varrho^2+\\
&+2^3(b-a)\,M^4\varrho^3+\cdots+2^n(b-a)^n\,M^{n+1}\varrho^n+\cdots=\\
&=M\sum_0^\infty{}_h\,[2(b-a)\,M\varrho]^h=M\sum_0^\infty{}_h\,\mu^h\,,
\end{aligned}
$$

avendo posto

$$2(b-a)\,M\varrho=\mu\,.$$

La serie

$$\sum_{0}^{\infty}{}_h\, \mu^h$$

è la serie geometrica; dunque possiamo asserire che, per

$$\varrho = |z| < \frac{1}{2(b-a)\,\mathrm{M}},$$

la serie

$$(4)\qquad [\Phi(y)]_{z=0} + \left[\frac{d\Phi(y)}{dz}\right]_{z=0} z + \frac{1}{1\,.\,2}\left[\frac{d^2\Phi(y)}{dz^2}\right]_{z=0} z^2 + \cdots$$

sarà convergente assolutamente ed uniformemente.

Nell'analisi precedente, abbiamo supposto che la Φ fosse una soluzione della data equazione. Si potrebbe, ora, verificare facilmente che la serie (4), dove

$$[\Phi(y)]_{z=0} = f(y)$$

$$\left[\frac{d\Phi(y)}{dz}\right]_{z=0} = \int_a^b \left\{ \mathrm{A}(\xi\,,y)\,\frac{df(\xi)}{d\xi} + \mathrm{B}(\xi\,,y)\,f(\xi) \right\} d\xi$$

e le successive derivate si calcolano mediante la (3), costituisce, entro il suddetto campo di convergenza, una soluzione della equazione (1).

Matematica. — *Sulle equazioni fra matrici* $\mathrm{AX}=\mathrm{XB}\,,\,\mathrm{X}^m=\mathrm{A}$. Nota del dott. FRANCESCO CECCONI, presentata dal Socio U. DINI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro.* Nota della dottoressa P. QUINTILI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Nella Nota *Sulla continuità di un integrale rispetto ad un parametro*, pubblicata in questi Rendiconti [1], dimostravo che l'integrale

$$\mathrm{F}(y) = \int_c^\infty \varphi(x)\,\mathrm{K}(x\,,y)\,dx$$

è una funzione continua di y.

Per dimostrare questo teorema, ponevo le due condizioni seguenti:

1°. La funzione $\varphi(x)$ sia una funzione limitata, monotòna, e tenda a zero per x infinito: la funzione $\mathrm{K}(x\,.\,y)$ sia una funzione delle due va-

[1] Volume XVII. serie 5ª, fasc. 10, 2° sem. 1908.