ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Fisica. — *Sul potere emissivo dei corpi neri* (1). Nota del dott. VIRGILIO POLARA, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

1. Fra le varie forme attribuite alla funzione che esprime il potere emissivo dei corpi neri sembra che si approssimi più sensibilmente ai risultati sperimentali quella data dal Wien:

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^5} e^{-\frac{c_1}{\lambda\vartheta}}. \tag{1}$$

Essa, come tutte le altre formule che si possono assegnare, deve soddisfare alle leggi fondamentali di Stefan-Boltzmann e del Wien (2), le quali, dedotte per via termodinamica, sono state confermate perfettamente dall'esperienza e sono quindi delle vere leggi fisiche.

Il Wien, per dedurre la formula (1) prende le mosse dalle ipotesi stabilite dal Michelson, modificandole in parte. Da queste ipotesi scaturisce immediatamente la relazione

$$E_\lambda = \varphi(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}. \tag{2}$$

Per dedurre da questa relazione la formula (1) il Wien (3) applica direttamente le leggi di Wien e di Stefan-Boltzmann. Così egli determina le funzioni $f(\lambda)$ e $\varphi(\lambda)$ mediante sviluppi in serie e con l'applicazione della funzione $\Gamma(n)$.

A me sembra però che, in seguito alle deduzioni del Planck, si possa ricavare dalla (2) la formula (1) con semplici processi di derivazione, e quindi per una via più immediata. Inoltre a me sembra che partire da queste deduzioni del Planck possa essere di non lieve utilità nella ricerca della funzione universale.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Fisica della R. Università di Pisa, diretto dal prof. A. Battelli.

(2) Queste due leggi, dette rispettivamente la legge delle quarte potenze e la legge di distribuzione, si esprimono in simboli $E = \int_0^\infty \varphi_\lambda d\lambda = a\vartheta^4$ e $\lambda_m \vartheta = \text{cost}$, essendo E l'energia integrale e λ_m la lunghezza d'onda corrispondente al massimo d'energia.

(3) Wied. Ann., 1896, vol. 58, pag. 666.

Il Planck (1) ha dimostrato che le leggi di Kirkoff, di Stefan-Bolzmann e del Wien *impongono* alla espressione che dà il potere emissivo dei corpi neri la seguente forma generale:

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^5}\,\psi(\lambda\vartheta) \tag{3}$$

essendo c una costante e ψ una funzione del prodotto $\lambda\vartheta$. Questa formula è quindi come il compendio delle tre leggi a cui deve necessariamente soddisfare la funzione che dà il potere emissivo dei corpi neri.

Confrontando (2) con (3), e posto $\lambda^5 f(\lambda) = F(\lambda)$, $c\psi(\lambda\vartheta = J(\vartheta\vartheta))$, si deduce

$$F(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} = J(\lambda\vartheta). \tag{4}$$

Ora, questa relazione funzionale determina le funzioni $F(\lambda)$ e $f(\lambda)$. Infatti, derivando la (4) rispetto a ϑ, si ha

$$F(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} \frac{f(\lambda)}{\vartheta^2} = J'(\lambda\vartheta)\,\lambda$$

e moltiplicando per ϑ

$$F(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} \frac{f(\lambda)}{\vartheta} = \psi(\lambda\vartheta)\,. \tag{5}$$

Derivando invece la (4) rispetto a λ si ha

$$F'(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} - F(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} \frac{f'(\lambda)}{\vartheta} = J'(\lambda\vartheta)\,\vartheta\,,$$

e moltiplicando per λ

$$\lambda F'(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} - F(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} \frac{\lambda f'(\lambda)}{\vartheta} = \psi(\lambda\vartheta)\,. \tag{6}$$

Dal confronto di (5) e (6) si deduce:

$$F(\lambda)\frac{f(\lambda)}{\vartheta} = \lambda F'(\lambda) - F(\lambda)\,\lambda\frac{f'(\lambda)}{\vartheta}\,,$$

o anche

$$F(\lambda)\left\{f(\lambda) + \lambda f'(\lambda)\right\} = \lambda\vartheta\, F'(\lambda)\,. \tag{7}$$

(1) Planck, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung*, pag. 85.

Derivando la (7) rispetto a ϑ si ha:

$$\lambda F'(\lambda) = 0, \quad \text{ossia} \quad F'(\lambda) = 0 \quad \text{e quindi} \quad F(\lambda) = c.$$

Dalla (7) allora, essendo $F(\lambda) \neq 0$ si ha

$$f(\lambda) + \lambda f'(\lambda) = 0$$

e integrando

$$f(\lambda) = \frac{c_1}{\lambda}.$$

Sostituendo in (2) si ha

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^5} e^{-\frac{c_1}{\lambda\sigma}}.$$

2. *Modificazioni alla formula del Wien.* — Ho già osservato che il Wien, per stabilire la sua formula, ha preso le mosse dalle ipotesi originarie del Michelson, modificandole in parte per evitare il risultato erroneo a cui questi era giunto.

In particolare il Wien trascura un'ipotesi che è fondamentale nella deduzione del Michelson (1), ipotesi secondo la quale « l'intensità della radiazione emanata da una molecola è proporzionale ad una sconosciuta funzione della temperatura assoluta, la quale costituisce un fattore che deve rappresentare il rafforzamento o l'indebolimento medio della radiazione, determinato in ogni onda primitiva dall'insieme delle vibrazioni risultanti e dall'assorbimento del corpo raggiante stesso ».

Eppure la considerazione di un tale fattore, funzione della temperatura assoluta, sembra indispensabile anche se si pon mente al nuovo concetto dell'irraggiamento e dell'assorbimento posto dal Planck (2) per via elettrodinamica.

Ma, a prescindere da ciò, il Wien trascura un altro fattore, $\vartheta^{-3/2}$ nell'applicazione della formula del Maxwell sulla distribuzione della velocità in un gran numero di molecole (3).

(1) Phil. Mg. 125, pag. 425, 1888.

(2) Planck, op. cit., pag. 100.

(3) Il Wien invero pone il numero delle molecole la cui velocità è fra v e $v+dv$ eguale a $v^2 e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$, mentre tale numero è $\frac{v^2}{\alpha_3} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$. E poichè

$$\alpha^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} (\overline{v^2})^{3/2} = K\vartheta^{3/2},$$

il fattore trascurato è proprio $\vartheta^{-3/2}$.

Io mi son proposto di vedere se, completando le ipotesi del Wien con l'ipotesi fatta dal Michelson — che cioè la radiazione emanata da una molecola sia proporzionale ad una sconosciuta funzione della temperatura assoluta — e applicando la vera formula del Maxwell come è data dai trattati di termodinamica, si potesse dedurre una nuova formula, non suscettibile delle obbiezioni cui è soggetta la formula del Wien.

Rifacendo intanto il ragionamento fatto dal Wien per dedurre la relazione $E_\lambda = \varrho(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}$, col tener conto però di ciò che il Wien ha trascurato, si deduce

$$E_\lambda = \psi(\lambda)\, \varphi(\vartheta)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}, \tag{1}$$

ritenendo che il fattore $\vartheta^{-5/2}$ sia incluso in $\varphi(\vartheta)$.

Ora, ricordando che, secondo le considerazioni del Planck, il potere emissivo dei corpi neri dev'essere della forma generale

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^5} J(\lambda\vartheta)$$

posto $\lambda^5\psi(\lambda) = F(\lambda)$, dovrà essere

$$F(\lambda)\, \varphi(\vartheta)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} = J(\lambda\vartheta). \tag{2}$$

Farò anche qui vedere che questa relazione funzionale determina le funzioni $F(\lambda)$, $\varphi(\vartheta)$ e $f(\lambda)$.

Derivando infatti la (2) rispetto a λ si ha:

$$\varphi(\vartheta)\left\{F'(\lambda)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} - F(\lambda)\frac{f'(\lambda)}{\vartheta} e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}}\right\} = \vartheta J'(\lambda\vartheta) \tag{3}$$

e derivandola invece rispetto a ϑ

$$F(\lambda)\left\{\varphi'(\vartheta)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} + \varphi(\vartheta)\, e^{-\frac{f(\lambda)}{\vartheta}} \frac{f(\lambda)}{\vartheta^2}\right\} = \lambda J'(\lambda\vartheta). \tag{4}$$

Moltiplicando la (3) per λ e la (4) per ϑ e confrontando le relazioni così ottenute si ha:

$$\lambda\varphi(\vartheta)\, F'(\lambda) - \lambda F(\lambda)\frac{f'(\lambda)}{\vartheta}\varphi(\vartheta) = \vartheta F(\lambda)\, \varphi'(\vartheta) + F(\lambda)\, \varphi(\vartheta)\frac{f(\lambda)}{\vartheta}.$$

Moltiplicando per ϑ e dividendo per $\varphi(\vartheta)\,\mathrm{F}(\lambda)$

$$\vartheta\left\{\lambda\frac{\mathrm{F}'(\lambda)}{\mathrm{F}(\lambda)}-\vartheta\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right\}=\lambda f'(\lambda)+f(\lambda). \tag{5}$$

Derivando la (5) rispetto a ϑ

$$\lambda\frac{\mathrm{F}'(\lambda)}{\mathrm{F}(\lambda)}-\vartheta\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}-\frac{d}{d\vartheta}\left\{\vartheta\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}\right\}=0.$$

Ossia, posto

$$\vartheta\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}=y(\vartheta),$$

$$\frac{\lambda\mathrm{F}'(\lambda)}{\mathrm{F}(\lambda)}=y(\vartheta)+y'(\vartheta)=\mathrm{U}(\vartheta). \tag{6}$$

Ed essendo il primo membro funzione di sola λ e il secondo di sola ϑ sarà

$$\frac{\lambda\mathrm{F}'(\lambda)}{\mathrm{F}(\lambda)}=\mu\ \text{(con }\mu\text{ costante)} \tag{7}$$

e

$$\mathrm{U}(\vartheta)=y+y'=\mu. \tag{8}$$

Si dedurrà quindi $\dfrac{\mathrm{F}'(\lambda)}{\mathrm{F}(\lambda)}=\dfrac{\mu}{\lambda}$ e integrando

$$\mathrm{F}(\lambda)=c_1\lambda^{\mu}\ \text{con } c_1\text{ costante.} \tag{9}$$

D'altra parte, integrando l'equazione differenziale (8) si ha

$$y(\vartheta)=e^{-\int d\vartheta}\int e^{\int d\vartheta}\mu\,d\vartheta=\mu e^{-\vartheta}e^{\vartheta}=\mu$$

e quindi

$$\vartheta\frac{\varphi'(\vartheta)}{\varphi(\vartheta)}=\mu \tag{10}$$

e quindi

$$\varphi(\vartheta)=c_2\,\vartheta^{\mu}. \tag{11}$$

Sostituendo in (5) i valori (7) e (10) si ha:

$$\lambda f'(\lambda)+f(\lambda)=0$$

e integrando

$$f(\lambda)=\frac{c_3}{\lambda}\ \text{con } c_3\text{ costante.} \tag{12}$$

Sostituendo infine nella (1) i valori (9) (11) e (12) si ha:

$$E_\lambda = \frac{c}{\lambda^5}(\lambda\vartheta)^\mu e^{-\frac{c_2}{\lambda\sigma}}, \tag{13}$$

essendo c una nuova costante.

Sono così pervenuto ad una formula analoga a quella data per altra via da Lord Rayleigh (1). Secondo la via da me seguìta però essa scaturisce, in modo affatto rigoroso dalla fusione e dal reciproco completamento delle ipotesi del Wien e del Michelson. Così modificate, le ipotesi del Wien non sono più suscettibili delle due più gravi obbiezioni che possono infirmare la formula del Wien.

Fisica. — *Sulla scomposizione magnetica delle linee spettrali.* Nota di MARIO TENANI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Ozosali complessi del titanio.* Nota di ARRIGO MAZZUCCHELLI ed ENRICO PANTANELLI, presentata dal Socio PATERNÒ.

In un lavoro precedente (2) è stato dimostrato da uno di noi che si può preparare sali complessi del titanio, dove questo elemento sia contenuto allo stato di perossido TiO_3, facendo agire l'acqua ossigenata sopra sali complessi del titanio tetravalente; come tali furono scelti i titanossalati, $TiO(C_2O_4Me)_2$, già studiati dal Péchard e successivamente da Rosenheim e Schütte.

Nella presente Nota si esporranno i tentativi e i risultati ottenuti sperimentando sopra altri composti di quell'elemento.

Premettiamo anzitutto che in queste ricerche, come in quelle precedenti di Mazzucchelli, abbiamo sempre tentato di preparare gli ozosali per azione di H_2O_2 sopra le soluzioni dei sali di titanio già formati; fare agire sul TiO_3 le soluzioni degli acidi che si supponevano capaci di formare con esso sali complessi non ci è sembata tecnica consigliabile (sebbene potesse avere un qualche valore per dedurre, dalle solubilità comparative del TiO_2 e del TiO_3, la loro diversa tendenza a formare anioni complessi) sia a causa della ine-

(1) Phil. Mg. 149, pag. 539, 1900.

(2) Questi Rendiconti, vol. 16, 2° sem., 1907, 265-273, 349-352.