ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Sulle equazioni fra matrici* $AX = XB$, $X^m = A$.

Nota del dott. Francesco Cecioni, presentata dal Socio U. Dini.

In una Memoria che sarà pubblicata negli Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, ho studiato alcune operazioni algebriche sulle matrici; nella presente Nota mi permetto di esporre i principali risultati che ivi ho ottenuti per le due equazioni fra matrici $AX = XB$, $X^m = A$ [1].

1. Una matrice quadrata A, appartenente ad un determinato campo di razionalità R, può ridursi, operando nel campo R, ad una certa *forma normale*, o *canonica*, A_0, perfettamente definita dai divisori elementari della matrice $A - E\omega$ nel campo R medesimo [2]. Con un metodo completamente analogo, considerando ancora dei sistemi di congruenze lineari i cui moduli sono i divisori elementari di $B_0 - E\omega$, si risolve (senza imporre la condizione che il determinante $|X|$ sia diverso da 0) l'equazione $AX = XB_0$, dove B_0 è una matrice normale in R. Si può quindi risolvere anche l'equazione $AX = XB$ (dove A e B sono due matrici quadrate, eventualmente di ordine diverso), riducendo prima B alla forma normale B_0. Si ottengono così i teoremi:

a) *Condizione necessaria e sufficiente perchè l'equazione* $AX = XB$ *ammetta soluzioni non nulle è che i due determinanti* $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$ *ammettano dei divisori comuni* [3]. *Si sa inoltre determinare razionalmente la soluzione generale dell'equazione stessa.*

b) *Siano* $P_1, P_2, \ldots, P_\nu$ *i divisori primi* (*nel campo* R) *comuni ad* $|A - E\omega|$, $|B - E\omega|$, *e* $P_i^{\alpha_{i,\varrho}}$ $(i = 1, 2, \ldots, \nu\ ;\ \varrho = 1, 2, \ldots, p_i)$ *i corrispondenti divisori elementari di* $A - E\omega$, $P_i^{\beta_{i,\sigma}}$ $(i = 1, 2, \ldots \nu\ ;\ \sigma = 1, 2, \ldots q_i)$ *quelli di* $B - E\omega$. *Indicando con* g_i *il grado di* P_i *e*

[1] Per le definizioni e le notazioni relative al calcolo con le matrici, o con le forme bilineari, si veda, ad es., Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, Leipzig, Teubner, 1899, pp. 20 e seg.; e Kronecker, *Vorlesungen über Determinantentheorie*, Leipzig, Teubner, 1903.

[2] V. O. Nicoletti, *Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari*, Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, t. XIV (1908), pp. 265-325, cap. I.

[3] Che la condizione detta sia necessaria è dimostrato (razionalmente) da Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*, Giornale di Crelle, vol. LXXXIV (1878), pp. 1-63, pag. 28; la sufficienza è dimostrata da Sylvester, *Sur l'équation en matrices* $px = xq$. Comptes rendus de l'Académie de Paris, 1884, 2° sem., pp. 67-70, 115-116, determinandone, però in modo irrazionale, alcune soluzioni particolari.

con $\gamma_{i\rho\sigma}$ *il più piccolo dei due numeri* $\alpha_{i,\rho}$, $\beta_{i,\sigma}$, *la soluzione generale della* AX = XB *dipende, in modo lineare ed omogeneo, da*

$$N = \sum_1^{\nu}{}_i \sum_1^{p_i}{}_\rho \sum_1^{q_i}{}_\sigma g_i \gamma_{i\rho\sigma}$$

parametri arbitrari.

c) *Il numero* N *può anche scriversi* $N = \Sigma\delta_{\rho\sigma}$, *dove* $\delta_{\rho\sigma}$ *è il grado del m. c. d. del* ρ^{esimo} *divisore elementare completo di* A — Eω *e del* σ^{esimo} *di* B — Eω.

d) *Perchè esistano soluzioni* X *con* $|X| \neq 0$, *è necessario e sufficiente che le due matrici* A, B *siano simili*, e si ha in questo caso

$$(1) \qquad N = n_0 + 2(n_1 + n_2 + \cdots + n_n) =$$
$$= \sum_1^{\nu}{}_i g_i(\alpha_{i1} + 3\alpha_{i2} + 5\alpha_{i3} + \cdots + (2p_i - 1)\,\alpha_{ip_i}),$$

dove n_r è il grado del m. c. d. dei minori di ordine $n - r$ di A — Eω (o di B — Eω).

2. Facendo in particolare B = A, si ottiene una risoluzione razionale del problema di *determinare tutte le matrici permutabili con una matrice assegnata* A. Fra queste matrici vi sono gli aggregati lineari di potenze di A; ricordando il teorema [1] per il quale il numero delle potenze linearmente indipendenti di una matrice A è dato, con le notazioni precedenti, da $g_1\alpha_{11} + g_2\alpha_{21} + \cdots + g_m\alpha_{m1}$ (dove m è il numero dei divisori distinti di $|A - E\omega|$, primi in R), e confrontando con la (1), si trova che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè ogni matrice permutabile con A *sia un aggregato lineare di potenze di* A, *è che ad ogni divisore primo di* $|A - E\omega|$ *corrisponda un solo divisore elementare della matrice* A — Eω, *o, ciò che è lo stesso, che i minori di ordine* $n - 1$ *di* A — Eω *abbiano come m. c. d. l'unità.*

3. L'equazione AX = XB può risolversi anche riducendo dapprima A, B rispettivamente alle loro forme normali A_0, B_0 (in R), e riportandosi così all'equazione $A_0Y = YB_0$. Per la forma speciale che hanno le A_0, B_0, la soluzione Y di questa equazione si determina facilmente, e se ne trae per induzione il teorema:

Mantenendo tutte le notazioni del n. 1, le caratteristiche che la soluzione generale della AX = XB *può assumere, quando le costanti arbi-*

[1] Per la dimostrazione *razionale* di questo teorema v. Frobenius, *Ueber vertauschbare Matrizen*, Sitzungsberichte der K. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1896, XXVI, pp. 601-614, p. 606.

trarie variano comunque nel campo R, *sono date dai numeri della forma* $r = l_1 g_1 + l_2 g_2 + \cdots + l_\nu g_\nu$ $(l_i = 0, 1, \ldots, \gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \cdots)$. *In particolare la massima caratteristica delle soluzioni della* $AX = XB$ *è data da*

$$\sum_1^\nu {}_i (\gamma_{i11} + \gamma_{i22} + \cdots) g_i = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \cdots$$

4. I risultati precedenti si semplificano nel caso che i divisori P_i siano lineari: quindi, in particolare, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi. Qui noteremo solo che in questo campo esistono soluzioni della $AX = XB$ aventi una qualunque caratteristica $r \leq \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} + \cdots$

Dalle proprietà trovate per la $AX = XB$, si deducono poi facilmente alcuni teoremi sulle forme bilineari e sostituzioni lineari, in parte e con meno precisione già noti, che lo spazio non ci permette di enunciare.

5. Alla equazione $AX = XB$ può ridursi il sistema $AX = YA_1$, $BX = YB_1$, nel quale supponiamo $|B| \neq 0$, $|B_1| \neq 0$; si vede subito infatti che la soluzione generale di questo sistema si deduce mediante le formule $X = ZB_1$, $Y = BZ$ dalla soluzione generale dell'equazione $B^{-1}AZ = ZA_1B_1^{-1}$. Si ottiene di qui in particolare il *teorema di Weierstrass* sull'equivalenza di due fasci di forme bilineari (v. Nicoletti, Mem. cit.).

6. Consideriamo ora l'equazione

$$X^m = A, \tag{2}$$

dove A è una matrice quadrata di ordine n [1]. Sia X una soluzione della (2) appartenente ad un campo R, che contiene A, ed X_0 la forma normale della X (in R); sarà:

$$X = P^{-1} X_0 P, \tag{3}$$

e $P^{-1} X_0^m P = A$, onde X_0^m ed A saranno simili. Il risultato è evidentemente invertibile; si ha così il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè, in un campo R *che contiene la* A, *la* (2) *ammetta soluzioni, è che il determinante* $|A - E\omega^m|$ *abbia in* R *un divisore di grado* n, *i cui fattori primi uguali o distinti possano aggrupparsi in un certo modo* $Q_1^{e_1}, Q_2^{e_2}, \ldots, Q_k^{e_k}$, *in guisa che la potenza* m^{esima} *della matrice* X_0 *di forma normale, che ha questi divisori elementari, sia simile ad* A.

Dicendo che due matrici simili appartengono alla stessa *classe*, vediamo che le soluzioni della (2) si distribuiscono in un numero finito di classi;

[1] Questa equazione è stata studiata da Frobenius (v. Muth, op. cit., pp. 37-40, ove cita Frobenius) per il caso $|A| \neq 0$; egli ne determina un numero finito di soluzioni che si esprimono come aggregati lineari di potenze di A. Da ciò che dimostreremo al n. 7 risulta poi che esse sono le sole che godano di questa proprietà. Si vedano anche varî lavori di Sylvester nei Comptes rendus, 1882, 1° sem., e 1884, 2° sem.

le matrici normali, in R, delle varie classi si determinano come risulta dal teorema enunciato; la soluzione generale di ogni classe è data dalla (3), dove X_0 è la matrice normale della classe, e P è la soluzione generale dell'equazione $P^{-1}X_0^m P = A$, e conterrà quindi, di solito, delle costanti arbitrarie.

7. In particolare, nel campo di razionalità di tutti i numeri reali e complessi è facile determinare i divisori elementari di $X_0^m - E\omega$, noti quelli di $X_0 - E\omega$; e dal risultato precedente, o anche direttamente, si ottiene che:

a) *Condizione necessaria e sufficiente perchè la* (2) *sia, nel campo totale, risolubile, è che gli esponenti dei divisori elementari della matrice* $A - E\omega$, *relativi al divisore* ω, *si possano disporre, prescindendo eventualmente da alcuni uguali all'unità, in gruppi di m ciascuno, in guisa che in ogni gruppo si abbiano al massimo due soli esponenti distinti, i quali differiscano di una unità.*

b) *Siano* H, H_1 *i primi due numeri di Predella* [1] *per la matrice* $A - E\omega$ *relativi al divisore* ω; *le caratteristiche delle soluzioni (supposte esistenti) della* $X^m = A$ *sono allora date dai numeri:*

$$n - H + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right],$$

$$n - H + (m-1)\left[\frac{H_1 + m - 1}{m}\right] + 1, \ldots, n - \left[\frac{H + m - 1}{m}\right],$$

indicando in generale con $[\alpha]$ il massimo intero contenuto in α.

8. Se P_1 è una soluzione particolare della $P^{-1}X_0^m P = A$, la soluzione generale di essa è data da $P = VP_1$, essendo V la soluzione generale della

$$V^{-1} X_0^m V = X_0^m; \tag{4}$$

di più, a due soluzioni V_1, V_2 della (4) corrisponde, per la (3), una medesima matrice X, allora e solo allora che sia $V_2 = UV_1$, essendo U una soluzione dell'equazione

$$U^{-1} X_0 U = X_0. \tag{5}$$

Da queste osservazioni si ha il teorema:

Una classe di soluzioni della $X^m = A$, *o contiene infinite soluzioni o ne contiene una sola*; una tale soluzione si dirà *singolare; queste soluzioni sono quelle per le quali le matrici permutabili con la corrispondente matrice normale* X_0, *sono quelle stesse permutabili con* X_0^m.

[1] Cfr. ad es. Bertini, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi*, Pisa, Spoerri, 1907, pag. 99.

Il confronto fra il numero delle costanti arbitrarie della V e quelle della U mostra poi che: *Perchè esistano (nel campo totale di razionalità) soluzioni singolari della* $X^m = A$, *è necessario e sufficiente che sia* $|A| \neq 0$; se μ è il numero delle radici distinte di $|A - E\omega| = 0$, le dette soluzioni sono m^μ, e sono quelle determinate dal Frobenius (V. n. 6).

Queste soluzioni singolari si possono poi caratterizzare in altro modo mediante il teorema seguente: *Le soluzioni singolari della* $X^m = A$ *sono tutte e sole quelle che possono esprimersi come aggregati lineari di potenze di* A. Basta perciò osservare che ambedue le condizioni che la soluzione sia singolare e che sia un aggregato di potenze di A, equivalgono alla condizione che X_0 sia esprimibile come aggregato lineare di potenze di X_0^m.

Si ottiene in particolare (dimostrato però in modo irrazionale) il teorema: *Perchè l'equazione* $X^m = A$ *ammetta un numero finito di soluzioni, è necessario e sufficiente che ad ogni divisore primo di* $|A - E\omega|$ *corrisponda un solo divisore elementare di* $A - E\omega$; *tutte le soluzioni sono in tal caso aggregati di potenze di* A. Questo fatto si presenta dunque (V. n. 2) insieme agli altri due fatti che la A abbia il numero massimo di potenze linearmente indipendenti, e che ogni matrice permutabile con A sia un aggregato di potenze di A.

9. Da ciò che abbiamo detto al n. precedente segue che non tutte le costanti che entrano nella matrice P sono essenziali nell'espressione (3) della X; vogliamo ora esprimere (razionalmente) la X per mezzo delle sole costanti essenziali. Sia perciò $U_1, U_2, \ldots, U_k$ un sistema completo di soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione (5); un sistema analogo per la (4) si potrà allora rappresentare con $U_1, U_2, \ldots, U_k, V_1, V_2, \ldots, V_h$, onde la più generale matrice V sarà del tipo $\sum_1^k{}_r \lambda_r U_r + \sum_1^h{}_s \mu_s V_s$. Una discussione alquanto minuziosa conduce (con procedimenti razionali) al teorema:

La soluzione generale della $X^m = A$, *di una classe determinata, può scriversi sotto la forma*

$$X = \left\{\left(\lambda E + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s\right) P_1\right\}^{-1} X_0 \left\{\left(\lambda E + \sum_1^h{}_s \lambda_s V_s\right) P_1\right\},$$

nella quale gli h rapporti $\lambda : \lambda_1 : \ldots : \lambda_h$ *sono h parametri essenziali.*

Per ottenere tutte le soluzioni si debbono però, eseguiti i calcoli, far tendere comunque le λ, λ_s ai valori limiti che annullano il determinante $|\lambda E + \Sigma \lambda_s V_s|$.

Il massimo valore della differenza h dà l'infinità delle soluzioni della $X^m = A$; si trova così che: *L'infinità delle soluzioni della* $X^m = A$ *è data da*

$$2(n_1 + \cdots + n_{m-1} + n_{m+1} + \cdots + n_{2m-1} + n_{2m+1} + \cdots),$$

essendo n_r *il grado del m. c. d. dei minori di ordini* $n - r$ *di* $A - E\omega$.

10. I risultati precedenti si possono in particolare applicare alle *matrici cicliche* (cioè all'equazione $X^m = E$) e alle *radici dello zero* (cioè all'equazione $X^m = 0$); si ha così che il numero delle classi è per le prime

$$\binom{m+n-1}{n};$$

per le seconde

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{m-2}} \left[\frac{n+2-3\alpha_1-4\alpha_2-\cdots-m\alpha_{m-2}}{2}\right],$$

$$(n+2-3\alpha_1-\cdots-m\alpha_{m2}>0);$$

l'infinità delle soluzioni è per le une e per le altre $n(n-q)-r(q+1)$, avendo posto $n = qm + r$ $(0 \leq r < m)$, ecc.; per le radici dello zero, le caratteristiche delle soluzioni sono date poi dai numeri

$$0, 1, 2, \ldots, n - \left[\frac{n+m-1}{m}\right].$$

Meccanica applicata. — *Di un importante coefficiente di stabilità negli aeroplani.* Nota del capitano del genio G. A. Crocco, presentata dal Corrispondente V. Reina.

La stabilità degli aeroplani è stata oggetto di poderosi studî del Bryan, del Ferber, del Lanchester, e, più recentemente, del Soreau [1]; ma per le inevitabili imperfezioni tuttavia esistenti nell'aerodinamica, queste teorie non possono ancora dirsi complete. In una Memoria, che l'autore sta per ultimare in collaborazione col dott. Luciano Orlando, si cercherà di portare un nuovo contributo agli elementi di questa non facile scienza. La presente Nota ha soltanto per oggetto di precisare una questione, che è stata soltanto accennata dai citati autori.

Sia un aeroplano composto di due sistemi di superficie, anteriore l'uno con angolo di obliquità α_1 sull'asse che unisce i due centri di pressione, e posteriore l'altro con angolo di obliquità α_2 sullo stesso asse che diremo *asse dell'aeroplano*. Decomponiamo le pressioni, generate sotto le dette superficie da una velocità di traslazione v, secondo l'asse dell'aeroplano e secondo un asse a questo perpendicolare. Siano r_1, r_2 le componenti assiali;

[1] R. Soreau, *État actuel et avenir de l'aviation.* Mém. de la Soc. des Ing. civils de France, Juillet 1908.