ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

10. I risultati precedenti si possono in particolare applicare alle *matrici cicliche* (cioè all'equazione $X^m = E$) e alle *radici dello zero* (cioè all'equazione $X^m = 0$); si ha così che il numero delle classi è per le prime

$$\binom{m+n-1}{n};$$

per le seconde

$$\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{m-2}} \left[\frac{n+2-3\alpha_1-4\alpha_2-\dots-m\alpha_{m-2}}{2}\right],$$

$$(n+2-3\alpha_1-\dots-m\alpha_{m2}>0);$$

l'infinità delle soluzioni è per le une e per le altre $n(n-q)-r(q+1)$, avendo posto $n=qm+r$ $(0 \leq r < m)$, ecc.; per le radici dello zero, le caratteristiche delle soluzioni sono date poi dai numeri

$$0\,,1\,,2\,,\dots,n-\left[\frac{n+m-1}{m}\right].$$

Meccanica applicata. — *Di un importante coefficiente di stabilità negli aeroplani.* Nota del capitano del genio G. A. Crocco, presentata dal Corrispondente V. Reina.

La stabilità degli aeroplani è stata oggetto di poderosi studî del Bryan, del Ferber, del Lanchester, e, più recentemente, del Soreau [1]; ma per le inevitabili imperfezioni tuttavia esistenti nell'aerodinamica, queste teorie non possono ancora dirsi complete. In una Memoria, che l'autore sta per ultimare in collaborazione col dott. Luciano Orlando, si cercherà di portare un nuovo contributo agli elementi di questa non facile scienza. La presente Nota ha soltanto per oggetto di precisare una questione, che è stata soltanto accennata dai citati autori.

Sia un aeroplano composto di due sistemi di superficie, anteriore l'uno con angolo di obliquità α_1 sull'asse che unisce i due centri di pressione, e posteriore l'altro con angolo di obliquità α_2 sullo stesso asse che diremo *asse dell'aeroplano*. Decomponiamo le pressioni, generate sotto le dette superficie da una velocità di traslazione v, secondo l'asse dell'aeroplano e secondo un asse a questo perpendicolare. Siano r_1, r_2 le componenti assiali;

[1] R. Soreau, *État actuel et avenir de l'aviation.* Mém. de la Soc. des Ing. civils de France, Juillet 1908.

p_1, p_2 le normali; ed r_3 la resistenza di tutti gli altri organi dell'aeroplano. Porremo $R = r_1 + r_2 + r_3$; $P = p_1 + p_2$.

Il momento delle $p_1 p_2$ rispetto al baricentro del sistema navigante, sarà:

$$C = p_2 a_2 - p_1 a_1 \tag{1}$$

dove a_1, a_2 sono le distanze dal detto baricentro delle p_1, p_2.

Suppongasi adesso l'aeroplano lanciato su una traiettoria orizzontale con velocità uniforme v_0; e per semplicità di calcoli riteniamo che l'asse dell'aeroplano sia in tal caso parallelo alla traiettoria, e che la spinta S delle eliche si trovi sulla linea d'azione, supposta assiale, della risultante delle r_1, r_2, r_3; onde la C rimanga la sola coppia di cui si debba tener conto.

Nel moto di regime così definito, nel quale è supposta nulla ogni perturbazione di rollio, dovranno verificarsi, detto mg il peso dell'aeroplano, le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} mg &= P_0 = p_{01} + p_{02} \\ S &= R_0 = r_{01} + r_{02} + r_{03} \\ 0 &= C_0 = p_{02} a_{02} - p_{01} a_{01}. \end{aligned} \tag{2}$$

Quando cause perturbatrici esterne e temporanee verranno ad alterare le condizioni del moto di regime, si provocheranno movimenti di beccheggio e di rollio, e sinuosità della traiettoria. Se, però, cessata la causa perturbatrice, l'aeroplano finirà spontaneamente, dopo un tempo praticamente limitato, col riprendere in altro punto dello spazio una traiettoria rettilinea ed uniforme, si è tacitamente convenuto fra gli aviatori di chiamarlo *stabile*.

Lo studio della stabilità si suol fare col classico metodo, diffusamente sviluppato nella meccanica del Routh [1]: noi considereremo soltanto la stabilità longitudinale, supponendola indipendente da quella laterale [2].

E pertanto, denominando con β e ϑ gli angoli con l'orizzonte della tangente alla traiettoria e dell'asse dell'aeroplano; con m la massa e con j il momento d'inerzia al beccheggio; con ϱ il raggio di curvatura della traiettoria nel piano verticale dove questa si svolge, le equazioni intrinseche del movimento potranno scriversi, per piccoli angoli:

$$\begin{gathered} m\frac{v^2}{\varrho} + i\frac{d\vartheta}{dt} + mg - P = mv_0\frac{d\beta}{dt} + i\frac{d\vartheta}{dt} + mg - P = 0 \\ m\frac{dv}{dt} + R - S + mg\beta = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

(1) E. I. Routh, *Advanced Rigid Dynamics*, Cap. VI.

(2) Non è difficile dimostrare che, *per perturbazioni sufficientemente piccole*, i movimenti di rollio influiscono su quelli di beccheggio per cause di second'ordine rispetto a quelle provenienti dal beccheggio stesso, e viceversa. Quindi, nello studio della stabilità col metodo esposto nel Routh, è giustificabile la semplificazione di scindere l'esame dei due movimenti, come se fossero indipendenti.

alle quali si aggiungerà l'equazione euleriana ridotta:

$$j\frac{d^2\vartheta}{dt^2}+\mathrm{I}\frac{d\vartheta}{dt}+\mathrm{C}-\mathrm{C}_0=0 \tag{4}$$

dove i, I, sono coefficienti di facile calcolazione (¹).

Ciò posto, indichiamo per semplicità con u la variazione $v-v_0$ della velocità; e richiamiamo le formule canoniche

$$\begin{aligned} p_1 &= k_1\, v^2(\alpha_1+\varphi)\\ p_2 &= k_2\, v^2(\alpha_2+\varphi)\end{aligned} \tag{5}$$

dove $\varphi=\vartheta-\beta$, e $k_1\, k_2$ sono coefficienti sperimentali dipendenti dall'area, dalla curvatura, e dalla forma delle superficie impiegate.

Anche r_1, r_2 si esprimeranno analogamente in funzione di v e φ; come anche la coppia C; e si potrà sempre scrivere, per piccoli valori di φ e di $\frac{u}{v_0}$, cioè per piccole perturbazioni attorno ai valori $\varphi=0$, $v=v_0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}-mg &= \mathrm{H}u+\mathrm{Q}\varphi\\ \mathrm{R}-\mathrm{S} &= hu+q\varphi\\ \mathrm{C}-\mathrm{C}_0 &= \mathrm{Y}u+\mathrm{J}\varphi\end{aligned} \tag{6}$$

dove H, Q, h, q, Y, J sono costanti rispetto a u, β, ϑ.

Le relazioni (6) sostituite nelle (3) e (4), poichè $\frac{dv}{dt}=\frac{du}{dt}$ forniranno un sistema di equazioni lineari nelle variabili u, ϑ, β; che avrà per caratteristica l'equazione di quarto grado:

$$\begin{vmatrix} \mathrm{H} & ix-\mathrm{Q} & mx+\mathrm{Q}\\ -(mx+h) & q & mg-q\\ -\mathrm{Y} & jx^2+\mathrm{I}x+\mathrm{J} & -\mathrm{J}\end{vmatrix}=\Delta=0. \tag{7}$$

La discussione della $\Delta=0$, che noi non faremo, porterà a stabilire, secondo il metodo in uso, le condizioni di stabilità. Noi ci limiteremo ad osservare che la $\Delta=0$ non potrà mancare di radici positive (caso di instabilità) se i coefficienti del termine in x^4 e del termine noto non sono dello

(¹) L'espressione di I, cioè $\mathrm{I}=k'\lambda\, v^2{}_0$, è stata da noi determinata in uno studio sulla stabilità dei dirigibili (V. Bollettino della Società Aeronautica, n.ⁱ 6 e 7) e, come osserva il Soreau, è ancor meglio applicabile al caso degli aeroplani. L'espressione di i, da noi trascurata nel citato studio, e che sfugge all'indagine del Soreau, può determinarsi integrando le pressioni elementari del piano rotante (cfr. loc. cit., n. 7, nota), anzichè i loro momenti; e risulta $i=k'\lambda\, v_0$, dove $k'\lambda$ ha il significato ivi definito.

stesso segno. Onde, fattovi $x = 0$, risulterà la condizione *necessaria* alla stabilità:

$$HJ - YQ > 0. \tag{8}$$

In generale, e se cioè si prescinde da quanto avviene in aeroplani che si allontanino molto dalle ipotesi fatte, oppure in aeroplani dove le ali siano elastiche nel modo descritto in recenti Note [1], il coefficiente Y è nullo o trascurabile; e quindi, essendo H una quantità positiva, si deve avere, per la stabilità, $J > 0$. Calcoliamo J.

Siano $l_1 = n_1\varphi$; $l_2 = n_2\varphi$ gli spostamenti delle linee d'azione delle pressioni $p_1\,p_2$, presi sull'asse e positive in senso opposto al moto per $\varphi > 0$. Si avrà: $a_1 = a_{01} - l_1$; $a_2 = a_{02} + l_2$; e, tenuto conto delle (5), l'espressione di $C - C_0$ potrà scriversi, tralasciando i termini che contengono φ^2,

$$C - C_0 = J\varphi = [(a_{02}\,k_2 - a_{01}\,k_1) + n_1\,k_1\,\alpha_1 + n_2\,k_2\,\alpha_2]\,v_0^2\,\varphi. \tag{9}$$

Introducendo adesso nelle (5) le condizioni del moto di regime, cioè $v = v_0$, $\varphi = 0$; la relazione terza delle (2), cioè $C_0 = 0$, fornisce la notevole conseguenza:

$$a_{02}\,k_2 - a_{01}\,k_1 = (\alpha_1 - \alpha_2)\,\frac{a_{01} + a_{02}}{p_{01} + p_{02}}\,k_1\,k_2\,v_0^4. \tag{10}$$

Detta a la distanza $a_{01} + a_{02}$ che i francesi chiamano *envergure*, osserviamo che, per la prima delle (2), il coefficiente di $\alpha_1 - \alpha_2$ nella (10), cioè $A^2 = k_1\,k_2\,\dfrac{av_0^4}{mg}$, diviene visibilmente un elemento caratteristico dell'aeroplano; e, poichè per $\alpha_1\,\alpha_2$ positivi si può porre $B^2 = n_1k_1\alpha_1 + n_2k_2\alpha_2$, la quantità J prende la forma suggestiva:

$$J = A^2(\alpha_1 - \alpha_2) + B^2 \tag{11}$$

e ne emerge che la condizione $J > 0$ è sempre soddisfatta quando si abbia $\alpha_1 > \alpha_2$.

Il calcolo da noi fatto non precisa il relativo cómpito dei due sistemi di superficie di cui abbiamo immaginato composto l'aeroplano.

Negli aeroplani francesi, a parte il piccolo timone frontale, la superficie anteriore, più grande, ha il cómpito di sostenere quasi tutto il carico, e forma le cosidette *ali*; mentre la posteriore, più piccola, che ha il cómpito della stabilità, forma la coda o *empennage*, ed ha l'angolo α_2 nullo o quasi.

Con ciò si viene infatti a soddisfare alla relazione $\alpha_1 > \alpha_2$, della quale gli aviatori francesi hanno intuìto il vantaggio, enunciando la frase che *la coda non deve essere portante.*

[1] L. Orlando, *Sopra un brevetto* .... ecc.; e *Effetto dell'attacco elastico* .... ecc. Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, fasc. 9° e 10°.

Negli aeroplani americani, invece, per esempio il Wright, la superficie alare è situata posteriormente; quella anteriore ha semplice còmpito di governo.

Ma è agevole riconoscere che, ottemperando alla detta diseguaglianza degli angoli d'attacco, si possano costruire aeroplani del tipo americano, cioè apparentemente sprovvisti di coda, quali l'aeroplano di Wright, che abbiano un coefficiente J di stabilità agevolmente eguale, ed anche superiore, a quello dei migliori aeroplani codati; e ciò forse con vantaggi costruttivi.

In tale caso, per la posizione avanzata del centro di gravità, la mancanza di coda è apparente, giacchè le ali stesse ne assumono la funzione stabilizzatrice.

Non sembra in vero che i fratelli Wright abbiano seguìto la norma indicata; chè, anzi, tengono l'angolo α_1 nullo o quasi nel moto di regime, ed esplicitamente lo dichiarano nei loro brevetti; nè noi, per altro, vogliamo dedurre assolute conseguenze sul vantaggio di un aeroplano *stabile* nè sul miglior modo di ottenerlo.

Abbiamo voluto soltanto affermare che dal punto di vista del coefficiente J, che ha così importante ufficio nella stabilità, l'*empennage* posteriore degli aeroplani francesi non è necessario; e può valere quanto un timone anteriore che sia, nel moto di regime, unitariamente *più portante* delle ali.

Matematica. — *Sull'equazione di Riccati.* Nota del dott. Luciano Orlando, presentata dal Socio V. Cerruti.

Noi faremo qui conoscere in che modo si possa agevolmente giungere da un'equazione differenziale di Riccati a un'equazione integrale del tipo di Volterra. Sebbene gli studî sulle equazioni integrali siano molto più recenti di quelli relativi alle equazioni differenziali, tuttavia possiamo asserire che, in parecchi casi, questa riduzione presenta qualche vantaggio.

Sia

$$y'(x) = a(x)\,[y(x)]^2 + b(x)\,y(x) + c(x) \tag{1}$$

un'equazione differenziale di Riccati. Ponendo

$$y = \frac{u}{v},$$

noi veniamo a trasformare la (1) nella relazione

$$u'v - uv' = au^2 + buv + cv^2 \tag{2}$$