ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Negli aeroplani americani, invece, per esempio il Wright, la superficie alare è situata posteriormente; quella anteriore ha semplice còmpito di governo.

Ma è agevole riconoscere che, ottemperando alla detta diseguaglianza degli angoli d'attacco, si possano costruire aeroplani del tipo americano, cioè apparentemente sprovvisti di coda, quali l'aeroplano di Wright, che abbiano un coefficiente J di stabilità agevolmente eguale, ed anche superiore, a quello dei migliori aeroplani codati; e ciò forse con vantaggi costruttivi.

In tale caso, per la posizione avanzata del centro di gravità, la mancanza di coda è apparente, giacchè le ali stesse ne assumono la funzione stabilizzatrice.

Non sembra in vero che i fratelli Wright abbiano seguìto la norma indicata; chè, anzi, tengono l'angolo α_1 nullo o quasi nel moto di regime, ed esplicitamente lo dichiarano nei loro brevetti; nè noi, per altro, vogliamo dedurre assolute conseguenze sul vantaggio di un aeroplano *stabile* nè sul miglior modo di ottenerlo.

Abbiamo voluto soltanto affermare che dal punto di vista del coefficiente J, che ha così importante ufficio nella stabilità, l'*empennage* posteriore degli aeroplani francesi non è necessario; e può valere quanto un timone anteriore che sia, nel moto di regime, unitariamente *più portante* delle ali.

Matematica. — *Sull'equazione di Riccati.* Nota del dott. LUCIANO ORLANDO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Noi faremo qui conoscere in che modo si possa agevolmente giungere da un'equazione differenziale di Riccati a un'equazione integrale del tipo di Volterra. Sebbene gli studî sulle equazioni integrali siano molto più recenti di quelli relativi alle equazioni differenziali, tuttavia possiamo asserire che, in parecchi casi, questa riduzione presenta qualche vantaggio.

Sia

$$y'(x) = a(x)\,[y(x)]^2 + b(x)\,y(x) + c(x) \tag{1}$$

un'equazione differenziale di Riccati. Ponendo

$$y = \frac{u}{v},$$

noi veniamo a trasformare la (1) nella relazione

$$u'v - uv' = au^2 + buv + cv^2 \tag{2}$$

Se $u(x)$ e $v(x)$ sono due funzioni di x, tali da verificare questa relazione, allora il rapporto $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ verificherà la (1).

Ora la (2) è certamente verificata quando valgano le due equazioni

$$u' = bu + cv \tag{3}$$

$$-v' = au\,. \tag{4}$$

Per ridurci all'equazione di Volterra, noi possiamo scegliere, dopo ciò, fra due vie.

In un primo procedimento, noi aggreghiamo alla (3) ed alla (4) la seguente altra equazione:

$$-v'' = a'u + au', \tag{5}$$

dedotta dalla (4) per derivazione. Eliminiamo u ed u' fra (3), (4) e (5). Risulta

$$v'' - \left(b + \frac{a'}{a}\right) v' + acv = 0\,. \tag{6}$$

Quest'equazione, lineare, omogenea, del second'ordine, si può, in casi non infrequenti, ridurre a un numero finito di quadrature, ovvero, in taluni altri casi, a classici sviluppi. In tutti i casi, peraltro, essa si può ridurre all'equazione integrale del tipo di Volterra, con diversi metodi, alcuni dei quali semplicissimi. La presenza di due costanti arbitrarie nell'integrale generale della (6), non escluderà che sia una sola la costante arbitraria essenziale che si presenta nell'integrale generale della (1).

Più breve suole riuscire un secondo metodo che ora indicheremo.

Integrando la (3), noi otteniamo

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(\xi)\, u(\xi)\, d\xi + \int_{x_0}^{x} c(\xi)\, v(\xi)\, d\xi\,.$$

E se applichiamo al secondo integrale, che figura in questa formula, la regola d'integrazione per parti, e poniamo

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} c(\xi)\, d\xi\,,$$

allora noi possiamo scrivere

$$u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(\xi)\, u(\xi)\, d\xi + C(x)\, v(x) - \int_{x_0}^{x} c(\xi)\, v'(\xi)\, d\xi\,.$$

Nel secondo di questi due integrali figura $-v'(\xi)$, che possiamo, per la (4), sostituire con $a(\xi)\, u(\xi)$. Ciò facendo, ricaviamo l'equazione

$$u(x) = u(x_0) + C(x)\, v(x) + \int_{x_0}^{x} [b(\xi) + a(\xi)\, C(\xi)]\, u(\xi)\, d\xi\,. \tag{7}$$

Quest'equazione contiene ancora $v(x)$; ma, integrando la (4), ce ne possiamo liberare, perchè otteniamo l'espressione

$$v(x) = v(x_0) + \int_{x_0}^{x} a(\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,,$$

la quale, sostituita in (7), ci permette di scrivere l'equazione di Volterra

$$u(x) = u(x_0) + C(x)\, v(x_0) + \int_{x_0}^{x} \{ a(\xi)\, [C(x) + C(\xi)] + b(\xi) \{ u(\xi)\, d\xi\,.$$

Le due costanti $u(x_0)$, $v(x_0)$, che qui figurano, si presenteranno nella soluzione $u(x)$, ma anche in $v(x)$; dunque nel rapporto $y(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ si presenterà una sola costante arbitraria essenziale.

Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. In una Nota [1], che porta lo stesso titolo della presente, il professore E. Levi ha dimostrato che « una funzione $u(xy)$ limitata ed integrabile linearmente su ogni circonferenza e superficialmente, che in ogni punto abbia come valore la media dei valori che essa ha su una circonferenza di centro quel punto, ha necessariamente le derivate dei varî ordini, ed è armonica ». Mantenendo, poi, ferme le altre condizioni, ha sostituito quella dell'integrabilità superficiale con altra meno restrittiva. Si può osservare che, nell'ipotesi dell'integrabilità superficiale della $u(xy)$, si possono togliere le condizioni di essere limitata ed integrabile linearmente su ogni circonferenza. Si può cioè dimostrare che *una funzione $u(x, y)$ integrabile superficialmente (nel senso di Lebesgue) ed avente in ogni punto come valore la media dei valori che essa ha su una circonferenza di centro quel punto — qualora su tale circonferenza essa risulti linearmente integrabile — è necessariamente una funzione armonica.*

Indicando con C il campo in cui è data la $u(x, y)$, e con C_R quello interno a C e tale che i suoi punti distino dal contorno di C per lo meno di R, consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{\Gamma_R(x,y)} u(x'y')\, dx'dy',$$

dove $\Gamma_R(x, y)$ indica il cerchio di centro (xy) e raggio R. Tale integrale

[1] Questi Rendiconti. Seduta 3 genn. 1909.