

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Cinematica. — *Alcune traiettorie di elettroni* (1). Nota di ANTONIO GARBASSO, presentata dal Socio A. NACCARI.

1. L'elettrone, che descrive di moto armonico la sua semplice traiettoria ellittica, emette uno spettro di una sola riga; genera invece una doppietta (*doublet*) se il movimento è perturbato, così che l'ellisse roti equabilmente nel piano (2).

Riferendoci ai diametri dell'orbita, avremo intanto

$$\begin{cases} X = a \cos 2\pi nt, \\ Y = b \sin 2\pi nt, \end{cases}$$

e assumendo poi due assi girati dell'angolo $-\varphi$,

$$\begin{cases} x = X \cos \varphi - Y \sin \varphi, \\ y = X \sin \varphi + Y \cos \varphi. \end{cases}$$

Quando si faccia

$$\varphi = 2\pi n't$$

verrà dunque senz'altro

$$\begin{cases} x = a \cos 2\pi nt \cos 2\pi n't - b \sin 2\pi nt \sin 2\pi n't, \\ y = a \cos 2\pi nt \sin 2\pi n't + b \sin 2\pi nt \cos 2\pi n't, \end{cases}$$

o, per semplici trasformazioni algebriche,

$$(1) \quad \begin{cases} x = A \cos 2\pi(n+n')t + B \cos 2\pi(n-n')t, \\ y = A \sin 2\pi(n+n')t - B \sin 2\pi(n-n')t; \end{cases}$$

con

$$(2) \quad \begin{cases} A = \frac{a+b}{2}, \\ B = \frac{a-b}{2}. \end{cases}$$

Le (1) dimostrano l'assunto, perchè affermano che il moto perturbato si può considerare come risultante dalla sovrapposizione di due moti circolari uniformi, contrarii di verso, con i raggi A e B, e le frequenze $n+n'$ e $n-n'$.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Genova.

(2) J. Stoney (*Dublin Trans.* (2), IV, 1891, pag. 563).

Passando a coordinate polari, le (1) prendono la forma

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho^2 &= A^2 + B^2 + 2AB \cos 4\pi n t, \\ \operatorname{tg} \theta &= \frac{A \sin 2\pi(n+n')t - B \sin 2\pi(n-n')t}{A \cos 2\pi(n+n')t + B \cos 2\pi(n-n')t}; \end{aligned} \right.$$

e dalla prima di queste segue anzitutto che la traiettoria del moto risultante è compresa fra due circonferenze di cerchio, coi raggi

$$A + B$$

e

$$A - B.$$

Il raggio vettore diventa massimo per $t = h/2n$, con h intero, vale a dire ad ogni mezza rivoluzione del punto che descrive l'ellisse.

La traiettoria risultante è formata di tante *foglie* identiche e simmetriche, delle quali è facile determinare il numero, quando sia razionale il rapporto n/n' . In una rivoluzione intera l'ellisse gira di

$$\frac{2\pi n'}{n};$$

tra una foglia e la seguente vi è dunque l'angolo

$$\frac{\pi(n+n')}{n},$$

e però il numero delle foglie è dato dal valore intero di h che verifica la

$$\frac{n+n'}{n} = \frac{2k}{h},$$

in corrispondenza della più piccola k intera. Se ne conclude che la curva avrà n foglie semplici quando n e n' sono numeri dispari; ne avrà $2n$ se uno è dispari e l'altro pari.

2. In pratica non sarebbe facile comporre insieme, con un artificio meccanico, due moti circolari rigorosamente uniformi; ma dalle (1) si deduce che la traiettoria del movimento obbiettivo rimane la medesima quando si ponga, in luogo della t , una funzione arbitraria del tempo.

E basterà dunque, per arrivare in fondo, comporre due moti rotatori, le cui velocità angolari conservino il rapporto costante

$$\frac{n+n'}{n-n'}.$$

Ho fatto costruire all' uopo il piccolo apparecchio della fig. 1, la disposizione del quale si ricava anche meglio dal diagramma seguente (fig. 2).

Un tubo d'acciaio, fissato con due viti, per il colletto *cc*, al sostegno *AB*,

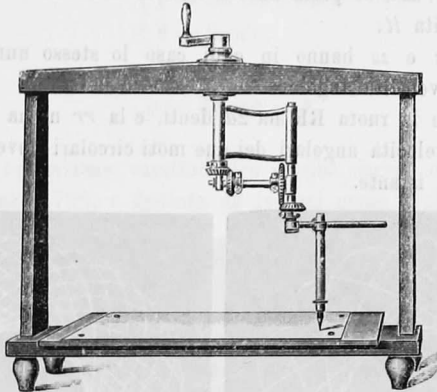


FIG. 1.

reca in basso un pignone (fisso) *ss*. Nel suo interno gira a sfregamento dolce

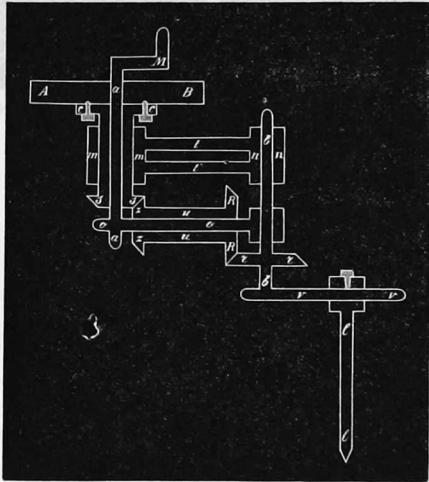


FIG. 2.

l'asse verticale *aa*, comandato dalla manovella *M*; mentre all'esterno vi è ancora un manicotto *mm* (libero), che per mezzo di due traverse *t* e *t'* reca un secondo manicotto *nn*. Dentro questo può girare l'altro asse verticale *bb*, al quale è unito rigidamente il pignone *rr*.

L'asse orizzontale oo si salda con un estremo ad aa , e all'altro estremo è sorretto da un manicotto infilato sopra bb . Al tubo uu , girante intorno ad oo , sono fissati i pignoni ss ed RR .

Finalmente, l'asse bb porta ancora un'asta orizzontale vv , che regge a sua volta la matita ll .

I pignoni ss e ss hanno in ogni caso lo stesso numero di denti, e quindi la stessa velocità angolare.

Ciò posto, se la ruota RR ha $2d$ denti, e la rr ne ha d , è facile persuadersi che le velocità angolari dei due moti circolari (inversi) risulteranno identiche in ogni istante.

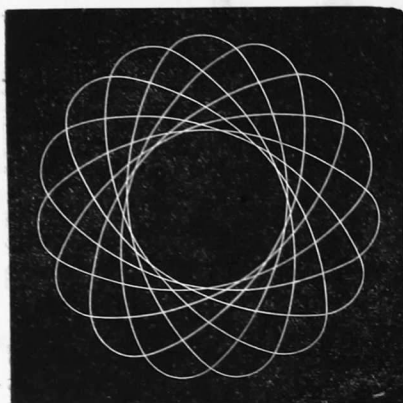


FIG. 3.

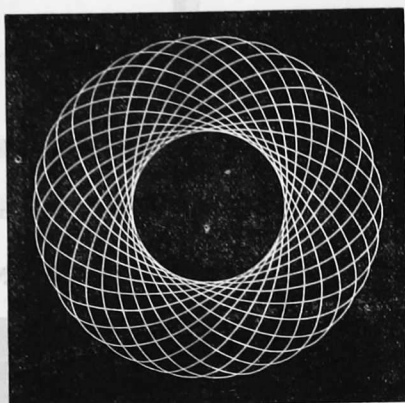


FIG. 4.

Che se il numero dei denti è nella ruota RR

$$2d - \delta,$$

avremo subito

$$\frac{d - \delta}{d} = \frac{n - n'}{n + n'}.$$

Sia, per esempio,

$$\begin{aligned} d &= 24 \\ \delta &= 3; \end{aligned}$$

verrà

$$\frac{n - n'}{n + n'} = \frac{21}{24} = \frac{15 - 1}{15 + 1};$$

la traiettoria del moto risultante ha 15 foglie (fig. 3).

Se fosse invece

$$\begin{aligned} d &= 17 \\ \delta &= 4, \end{aligned}$$

verrebbe

$$\frac{n - n'}{n + n'} = \frac{13}{17} = \frac{15 - 2}{15 + 2},$$

e la traiettoria del moto risultante avrebbe 30 foglie (fig. 4).

3. Un caso particolare interessante della traiettoria (3) è quello in cui $A = B$.

Risulta allora

$$(4) \quad \begin{cases} \varrho = 2A \cos 2\pi n t, \\ \theta = 2\pi n' t, \end{cases}$$

e dunque

$$(5) \quad \varrho = 2A \cos \frac{n}{n'} \theta.$$

La (5) è l'equazione caratteristica di una curva, che fu descritta da Guido Grandi nel 1728, e distinta da lui col nome di Rodonea ⁽¹⁾.

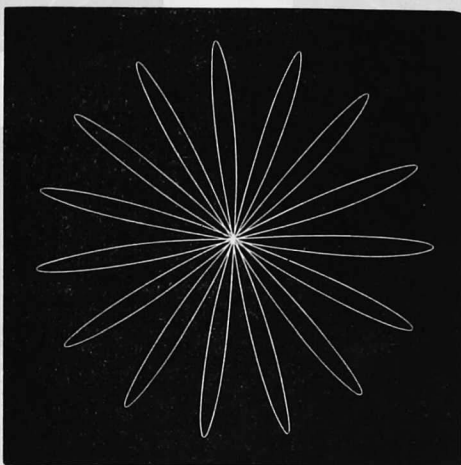


FIG. 5.

Si può chiamare convenientemente *Rodonea dispari* quella che ha un numero dispari di foglie, e *Rodonea pari* quella che risulta di un numero pari. La fig. 5 rappresenta una *Rodonea dispari* ($n = 15$, $n' = 1$) ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Guido Grandi, professore di matematica nell'Università di Pisa, e abate di San Michele in Borgo, pubblicò nel 1728, a Firenze, *apud Tartinium et Franchium*, un libretto dal titolo: *Flores geometrici ex Rhodonearum et Cloeliarum curvarum descriptione resultantes*. L'opera è dedicata alla illi^{ma} ed eccelsa signora Donna Clelia Grillo Borromeo, e un riassunto della prima parte era stato accolto, cinque anni avanti, nelle Transactions della Società Reale di Londra per il 1723. Le *Clelie* sono curve sferiche, e non hanno dunque niente in comune con quelle che, più avanti, nel testo, vengono chiamate *Rodonee coniche*.

⁽²⁾ Una figura simile a questa si trova già nel Trattato di Filosofia naturale di Thomson e Tait (§ 74 del primo volume).

4. Proponiamoci adesso di studiare la traiettoria di un punto soggetto ad un tempo al moto (4) e all'altro, normale al piano del primo, che è

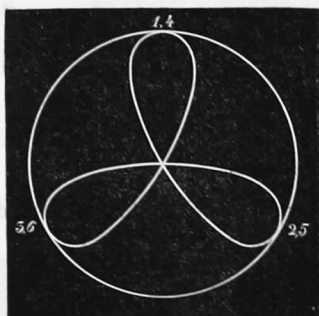


FIG. 6.

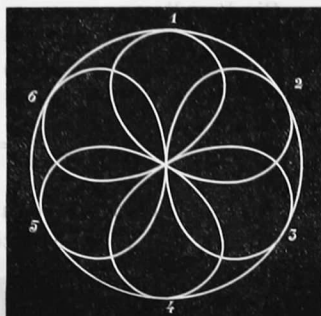


FIG. 8.

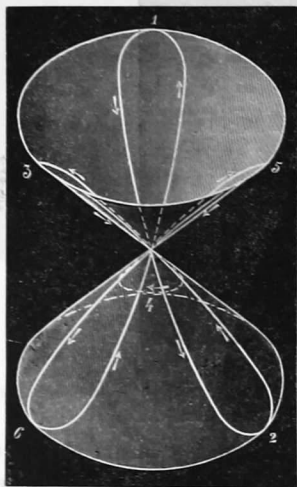


FIG. 7.

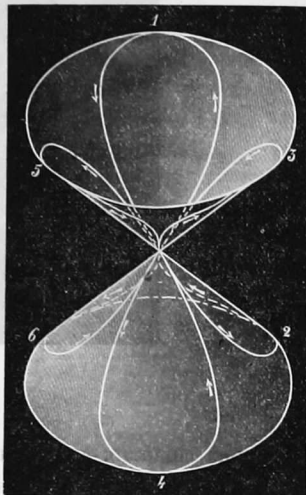


FIG. 9.

rappresentato dalla

(6)

$$z = C \cos 2\pi n t.$$

Avremo subito, come equazioni di codesta linea,

(7)

$$\begin{cases} e = 2A \cos \frac{n}{n'} \theta, \\ z = C \cos \frac{n}{n'} \theta. \end{cases}$$

La curva giace sopra un cono circolare

$$\frac{\rho}{z} = \frac{2A}{C},$$

il cui asse coincide con l'asse delle z ; è formata in ogni caso da $2n$ foglie, che si adagiano per metà su la falda positiva e per l'altra metà su la falda negativa.

Se la proiezione sul piano $z = 0$ è una Rodonea dispari, le foglie negative sdoppiano le positive; se è una Rodonea pari, le foglie positive e le negative si alternano.

La (7) potrebbe indicarsi col nome di *Rodonea conica*.

Dalla Rodonea dispari della fig. 6 ($n = 3$, $n' = 1$) si genera ad esempio la Rodonea conica della fig. 7: e dalla Rodonea pari della fig. 8 ($n = 3$, $n' = 2$) nasce la Rodonea conica della fig. 9.

5. *La traiettoria caratteristica del fenomeno di Zeeman è una Rodonea conica*, almeno per i valori del campo magnetico, che rendono razionale il rapporto n/n' .

Fisica. — *L'arco voltaico nella sua fase iniziale*⁽¹⁾. Nota di A. OCCHIALINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

1. In una Nota precedente ⁽²⁾, studiando le condizioni che si realizzano allorchè l'arco si adescia, sono stato portato a concludere che l'arco, stabilendosi fra due elettrodi, deve passare per una fase preparatoria che corrisponde al passaggio di corpuscoli dall'elettrodo negativo all'elettrodo positivo e che dura finchè gl'ioni positivi creati per urto presso l'anodo, e estratti dall'elettrodo positivo, propagandosi verso il catodo, non abbiano stabilito la colonna luminosa che collega i due elettrodi e che costituisce l'arco propriamente detto.

Scopo di questa Nota è di studiare la fase preparatoria dell'arco e l'arco stesso nel suo periodo iniziale. Per questo mi varrò dell'azione di un campo magnetico; quindi per l'esatta interpretazione delle esperienze che saranno esposte in seguito, stimo opportuno premettere alcune considerazioni sulla azione di un campo magnetico sopra gl'ioni mobili in seno a un gas.

L'arco una volta stabilito si presenta come una colonna dotata di contrattilità e di coesione, e ciò è ben naturale se, come generalmente si ammette, esso è costituito da un insieme di ioni di segno contrario che eser-

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Pisa, diretto dal Prof. A. Battelli.

⁽²⁾ Rendiconti R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1909.