ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

ciascuno dei quali è pure sufficiente per la validità della suddetta formola (6).

Noterò anche che le $h - 2$ ipotesi sopra enunciate si possono compendiare in questa unica:

Lo spazio $S_{a_{i_1 i_2 \dots i_l}}$ è in posizione regolare rispetto ad $S_{a_{1 i_2 \dots i_l}}$, $S_{a_{2 i_2 \dots i_l}}$, ..., $S_{a_{i_1 - 1\, i_2 \dots i_l}}$, dovendosi porre per $i_1\, i_2 \dots i_l$ tutte le combinazioni di specie $l (= 1, 2, \dots, h-2)$ dei numeri $3\ 4 \dots h$ compatibili colle limitazioni $i_l > i_{l-1} > \cdots > i_2 > i_1 > 2$.

Matematica. — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota 3ª del Socio E. Bertini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non-euclideo in tetraedri ed ottaedri regolari.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1. Riprendo una questione che trattai in altra mia Nota, ove cercai tutti i modi di riempire lo spazio non-euclideo con poliedri regolari congruenti fra loro [1].

Trovai, allora, soltanto due modi di effettuare una tale divisione, e cioè:

1ª) in ottaedri regolari con angoli piani retti e diedri retti;

2ª) in dodecaedri regolari con angoli piani nulli e diedri retti.

Ma in realtà esistono, come venne poi osservato dal Fricke, due e due soli altri modi di divisione, e cioè in tetraedri e dodecaedri regolari con angoli piani nulli e diedri $= \frac{\pi}{3}$ [2].

Scopo della presente comunicazione è di caratterizzare *aritmeticamente* i gruppi di sostituzioni lineari di 1ª e di 2ª specie che nascono, secondo il principio di Poincaré (Acta Math., vol. 3), combinando tutte le riflessioni sulle facce dei tetraedri o degli ottaedri regolari appartenenti a due delle

[1] *Sulle divisioni regolari dello spazio non-euclideo in poliedri regolari.* Questi Rendiconti, luglio 1893.

[2] L'omissione di questi due tipi nella Nota citata è dovuta allo scambio, avvenuto ivi al n. 3, dell'angolo rettilineo misura del diedro col suo supplemento. Con questa rettificazione si riconosce immediatamente l'esistenza degli altri due tipi del testo.

quattro divisioni. Si vedrà che essi sono semplicemente sottogruppi *congruenziali* del gruppo delle sostituzioni unimodulari

$$\begin{pmatrix} \alpha , \beta \\ \gamma , \delta \end{pmatrix} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 ,$$

con coefficienti interi appartenenti al campo immaginario quadratico $(1 , \varepsilon)$ o $(1 , i)$ della radice cubica ε o della radice quarta i dell'unità.

2. Ponendo

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{(radice cubica dell' unità)},$$

consideriamo quel gruppo G di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) ,$$

i cui coefficienti $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ sono interi nel campo $(1 , \varepsilon)$, e per le quali inoltre sono soddisfatte le congruenze

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon} ,$$

rispetto al modulo primo $1 - \varepsilon$. Ampliamo il gruppo G colla riflessione $z' = z_0$ (¹), permutabile con G, ed avremo il gruppo ampliato, che indicheremo con G_0, constante delle sostituzioni di 1ª e di 2ª specie

$$\left\{ \begin{array}{ll} a) & z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \\ b) & z' = \dfrac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \end{array} \right. \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \; ; \; \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1 - \varepsilon} .$$

Dimostreremo che il poliedro fondamentale di G_0 è appunto il tetraedro regolare con angoli piani nulli e diedri $= \dfrac{\pi}{3}$.

Osserviamo prima di tutto il periodo delle sostituzioni ellittiche contenute in G. La *a*) sarà ellittica quando $\alpha + \delta$ sia reale e minore, in valore assoluto, di 2; sarà per ciò

$$\alpha + \delta = 0 \quad \text{o} \quad \alpha + \delta = \pm 1.$$

Ma il primo caso è impossibile, perchè non può aversi insieme

$$\alpha + \delta = 0 \quad \alpha\delta \equiv 1 \pmod 3 ,$$

e resta per ciò possibile solo il caso $\alpha + \delta = \pm 1$ ove le corrispondenti

(¹) Colla notazione di Hermite z_0 significa la coniugata di z.

sostituzioni ellittiche hanno il periodo 3. Considerando ora le sfere (piani) di riflessione di G_0, segue di qui: *Se due sfere di riflessione di* G_0 *si attraversano, esse si tagliano sotto l'angolo* $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$.

Ed ora ricerchiamo effettivamente tutte le riflessioni contenute in G_0. Esse sono date da quelle sostituzioni *b)* in cui α, δ sono coniugati immaginarî e β, γ sono puramente immaginarî, ed hanno quindi la forma

$$z' = \frac{(a_1 + a_2\varepsilon) . z_0 + ib_1\sqrt{3}}{ic_1\sqrt{3} . z_0 + (a_1 + a_2\varepsilon^2)}, \tag{1}$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi razionali, soddisfacenti alla equazione

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 + 12b_1c_1 = 4. \tag{2}$$

I piani di riflessione si ottengono in particolare quando $c_1 = 0$; e poichè allora la (2) ha le sole soluzioni

$$a_2 - 2a_1 = \pm 2 \quad , \quad a_2 = 0$$
$$a_2 - 2a_1 = \pm 1 \quad , \quad a_2 = \pm 1,$$

si vede che: *si ottengono tutti i piani di riflessione di* G_0 *dalle equazioni*

$$\eta = \frac{b\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \xi\sqrt{3} \pm \eta = b\sqrt{3},$$

percorrendo b *tutti gli interi razionali.*

Questi piani di riflessione dividono per ciò il semispazio $\zeta > 0$ in prismi triangolari retti congruenti, a base equilatera. Si consideri uno di tali prismi, per es. quello racchiuso dai tre piani

$$\text{I)} \quad \eta = 0, \qquad \text{II)} \quad \eta = \xi\sqrt{3}, \qquad \text{III)} \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3},$$

nell'interno del quale non penetra più alcun piano di riflessione. La base di questo prisma è il triangolo equilatero nel piano complesso $z = \xi + i\eta$, coi tre vertici nei punti

$$0, 1, \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Consideriamo ora le sfere di riflessione ($c_1 \neq 0$), coll'equazione

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 - 2a_1}{2c_1\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{c_1\sqrt{3}}\right)^2, \tag{3}$$

i numeri interi a_1, a_2, c_1 soddisfacendo alla congruenza

$$(a_2 - 2a_1)^2 + 3a_2^2 \equiv 4 \pmod{12\, c_1}. \tag{4}$$

Fra queste sfere abbiamo la seguente:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3}, \tag{IV)}$$

corrispondente alla riflessione di G_0

$$z' = \frac{\varepsilon z_0}{i\sqrt{3}\, z_0 + \varepsilon^2};$$

essa ha per equatore (per sezione col piano $\xi\eta$) il circolo circoscritto al triangolo equilatero considerato. I tre piani di riflessione I) II) III) e la sfera IV) racchiudono un poliedro Π, che è la porzione del prisma esterno alla sfera IV), ed è appunto un tetraedro regolare con diedri $= \frac{\pi}{3}$ e coi quattro vertici

$$V_1 \equiv (0\,,0\,,0)\,, \quad V_2 \equiv (1\,,0\,,0)\,, \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}\,, \frac{\sqrt{3}}{2}\,, 0\right)$$
$$V_4 \equiv (0\,,0\,,\infty),$$

che nella metrica non-euclidea sono tutti situati a distanza infinita.

3. Proveremo ora che il tetraedro regolare Π è il poliedro fondamentale di G_0 dimostrando successivamente queste due proprietà:

1ª) Nessuna sfera di riflessione di G_0 attraversa il tetraedro Π.

2ª) Nessuna sostituzione di G_0, diversa dall'identità, trasforma Π in sè medesimo.

Per dimostrare la prima asserzione cominciamo dall'osservare che, il tetraedro Π avendo diedri $= \frac{\pi}{3}$, nessuna sfera (piano) di riflessione di G_0 può penetrare in Π attraverso uno spigolo, poichè taglierebbe allora le facce concorrenti in quello spigolo sotto un angolo $< \frac{\pi}{3}$. Dunque una sfera di riflessione di G_0 che attraversasse Π, dovrebbe contenere *nel suo interno* almeno uno dei tre vertici V_1, V_2, V_3. Vediamo se ciò è possibile.

Secondo le (3), (4) l'equazione di una sfera di riflessione di G_0 si può scrivere

$$\left(\xi - \frac{a}{2c}\right)^2 + \left(\eta - \frac{b}{2c\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3c^2}, \tag{5}$$

dove a, b, c sono interi razionali soddisfacenti alla congruenza

$$3a^2 + b^2 \equiv 4 \pmod{12\,c}, \tag{6}$$

dalla quale risulta

$$b \equiv \pm 1 \pmod{3}. \tag{7}$$

Ora, perchè la sfera (5) contenga nel suo interno V_1 o V_2, o V_3, dovranno rispettivamente verificarsi le diseguaglianze

$$3a^2 + b^2 < 4\,, \text{ per } V_1 \tag{α}$$

$$3(2c - a)^2 + b^2 < 4\,, \text{ per } V_2 \tag{β}$$

$$3(c - a)^2 + (3c - b)^2 < 4\,, \text{ per } V_3. \tag{γ}$$

Ma poichè, a causa della (7), b o $3c - b$ non possono essere nulli e sono quindi uguali a ± 1, ne seguirebbe rispettivamente

$$a = 0\,, \quad \text{o} \quad a = 2c\,, \quad \text{o} \quad a = c\,,$$

ciò che è incompatibile colla congruenza (6). La prima proprietà è dunque stabilita.

Venendo alla seconda proprietà osserviamo che, il tetraedro Π essendo regolare, esso ammette un gruppo tetraedrale ampliato di 24 movimenti in sè, e cioè 12 di 1ª e 12 di 2ª specie; ma, come ora si vedrà, nessuno di essi, esclusa l'identità, appartiene G_0.

Per le sostituzioni $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ corrispondenti ai 12 movimenti del gruppo tetraedrale di Π, scrivendole sotto forma unimodulare, troviamo subito

$$\left\{\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \\ \varepsilon^2, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon^2, & \varepsilon^2 \\ 1, & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon, & 1 \\ \varepsilon, & -\varepsilon \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} \varepsilon^2, & \varepsilon \\ 0, & \varepsilon \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\varepsilon, & 0 \\ \varepsilon^2, & -\varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \\[2ex]
\begin{pmatrix} \varepsilon, & -\varepsilon \\ 0, & \varepsilon^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1, & -\varepsilon^2 \\ \varepsilon, & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varepsilon^2, & 0 \\ \varepsilon^2, & \varepsilon \end{pmatrix},
\end{array}\right.$$

dove abbiamo scritto nella prima riga le 4 costituenti il sottogruppo invariante quadrinomio (Vierergruppe). Nessuna di queste, salvo la prima (l'identità), appartiene a G.

Combinando queste 12 sostituzioni colla riflessione sul piano $\xi = \frac{1}{2}$

$$z' = -z_0 + 1\,,$$

che riproduce Π, abbiamo le 12 sostituzioni di 2ª specie che, avendo determinante $= -1$, non appartengono a G_0.

Così è dimostrata anche la seconda asserzione. Di più osserviamo che le 24 sostituzioni riproducenti Π appartengono tutte al gruppo Γ_0 delle sostituzioni di 1ª e 2ª specie a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ con coefficienti interi nel campo $(1, \varepsilon)$ e lo generano completamente poichè vi figurano le quattro riflessioni fondamentali di Γ_0

$$z' = z_0 \ , \quad z' = \frac{1}{z_0} \ , \quad z' = -z_0 + 1 \ , \quad z' = -\frac{\varepsilon z_0}{\varepsilon^2} \, .$$

Questo Γ_0 è adunque il più ampio gruppo in cui G_0 è contenuto come sottogruppo invariante (d'indice 24). Concludiamo adunque;

Il tetraedro regolare Π con angoli piani nulli e diedri $= \dfrac{\pi}{3}$ è il poliedro fondamentale del gruppo G_0. *Il più ampio gruppo in cui* G_0 *è contenuto come sottogruppo invariante è il gruppo completo Γ_0, che consta di tutti i movimenti di 1ª e 2ª specie che trasformano in sè la divisione tetraedrica dello spazio non-euclideo.*

4. Per passare alla divisione ottaedrica consideriamo quel sottogruppo G del gruppo di Picard di sostituzioni *unimodulari* a coefficienti interi di Gauss, che è definito dalle congruenze

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2 :$$

abbiamo così in G le sostituzioni

$$\text{A)} \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad ; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \ , \ \beta \equiv \gamma = 0 \pmod 2 .$$

Ampliamo il gruppo G in G_0, aggregandovi le sostituzioni di 2ª specie

$$\text{B)} \qquad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

$$\beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod 2 ,$$

e, ricercando il poliedro fondamentale di G_0, troveremo che esso è appunto l'ottaedro regolare con diedri retti ed angoli piani nulli.

Cominciamo dall'osservare che nelle sostituzioni ellittiche A) di G può aversi soltanto

$$\alpha + \delta = 0 ,$$

poichè l'altro caso $\alpha + \delta = \pm 1$ è incompatibile colla congruenza

$$\alpha\delta \equiv 1 \pmod 4 ;$$

dunque le sostituzioni ellittiche di G hanno esclusivamente il periodo 2. Conseguentemente due sfere di riflessione di G_0 non possono attraversarsi che ortogonalmente.

Ciò premesso, cerchiamo le riflessioni di G_0, che avranno la forma

$$z' = \frac{(\alpha_1 + i\alpha_2) z_0 + 2i\beta_1}{2i\gamma_1 z_0 + (\alpha_1 - i\alpha_2)},$$

la quaderna $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ di numeri interi razionali soddisfacendo all'equazione

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 4\beta_1\gamma_1 = 1 .$$

I piani di riflessione si ottengono per $\gamma_1 = 0$ ed hanno le equazioni

$$\eta = \beta \quad , \quad \xi = \beta ,$$

percorrendo β gli interi ordinarî. Questi piani dividono per ciò il semispazio $\zeta > 0$ in prismi retti a base quadrata, fra i quali sceglieremo p. es. quello limitato dai quattro piani

$$\text{I)}\ \eta = 0 , \qquad \text{II)}\ \xi = 0 , \qquad \text{III)}\ \eta = 1 , \qquad \text{IV)}\ \xi = 1 ,$$

nell'interno del quale non penetra alcun altro piano di riflessione. La base di questo prisma è nel piano $\xi\eta$ il quadrato coi vertici nei punti

$$0 , 1 , 1 + i , i .$$

Prendiamo ora le sfere di riflessione, date dall'equazione

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2}{2\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{\alpha_1}{2\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \left(\frac{1}{2\gamma_1}\right)^2 ,$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \gamma_1$ percorrono le terne di numeri razionali interi che soddisfano alla congruenza

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \equiv 1 \pmod{4\gamma_1} .$$

Il massimo raggio delle sfere di riflessione è $= \frac{1}{2}$; fra queste sfere di massimo raggio consideriamo le quattro

$$\begin{array}{ll}
\text{V)} & (\xi - \tfrac{1}{2})^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{4} \\
\text{VI)} & \xi^2 + (\eta - \tfrac{1}{2})^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{4} \\
\text{VII)} & (\xi - \tfrac{1}{2})^2 + (\eta - 1)^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{4} \\
\text{VIII)} & (\xi - 1)^2 + (\eta - \tfrac{1}{2})^2 + \zeta^2 = \tfrac{1}{4} ,
\end{array}$$

le quali sono descritte rispettivamente sui lati del quadrato considerato come diametri. La regione del semispazio $\zeta > 0$ interna al prisma ed esterna alle quattro sfere ci dà appunto un ottaedro regolare Π con angoli piani nulli e diedri retti. I suoi 6 vertici sono nei punti

$$V_1 \equiv (0\,,0\,,0)\,,\ V_2 \equiv (1\,,0\,,0)\,,\ V_3 \equiv (1\,,1\,,0)\,,\ V_4 \equiv (0\,,1\,,0)\,,$$
$$V_5 \equiv (\tfrac{1}{2}\,,\tfrac{1}{2}\,,0)\,,\ V_6 \equiv (0\,,0\,,\infty)\,,$$

tutti situati a distanza infinita nella metrica non-euclidea. Dimostriamo che: *L'ottaedro regolare Π è il poliedro fondamentale del gruppo* G_0.

Intanto nessuna sfera di riflessione attraversa Π, poichè ciò non può avvenire lungo uno spigolo, i diedri essendo già $= \frac{\pi}{2}$. Una sfera di riflessione che attraversasse Π dovrebbe dunque contenere nel suo interno almeno uno dei 5 vertici

$$0\,,1\,,1+i\,,i\,,\frac{1+i}{2}$$

e quindi taglierebbe ortogonalmente tutte e quattro le facce ivi concorrenti; ciò che è impossibile.

Esaminiamo ora i movimenti di 1ª e 2ª specie che sovrappongono Π a sè stesso e che formano il gruppo ottaedrale ampliato di 48 sostituzioni. Le 24 di 1ª specie sono le seguenti (¹):

$$\left\{\begin{array}{llll}
\begin{pmatrix}1\,,0\\0\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,1\\0\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-1\,,1+i\\0\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-i\,,i\\0\,,1\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}i\,,0\\1+i\,,-i\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,-i\\1+i\,,-i\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,1-i\\1+i\,,-i\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,1\\1+i\,,-i\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}0\,,1\\-1\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-1\,,1+i\\-1\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-(1+i)\,,i\\-1\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-i\,,0\\-1\,,1\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}0\,,i\\i\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,0\\i\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i-1\,,1\\i\,,1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}-1\,,1+i\\i\,,1\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}1\,,-1\\1\,,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1+i\,,-i\\1\,,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}i\,,1\\1\,,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\,,i\\1\,,0\end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix}i\,,-i\\1\,,0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\,,-i\\1\,,-(1-i)\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\,,-i\\1\,,-(1+i)\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1+i\,,-i\\1\,,-(1+i)\end{pmatrix}.
\end{array}\right.$$

Nessuna di esse, esclusa l'identità, appartiene a G. Le altre 24 si ottengono combinando le 24 precedenti p. es. colla riflessione

$$z' = iz_0$$

e sono ancora tutte fuori di G_0.

Così è dimostrata la proprietà annunciata e vediamo altresì che il più ampio gruppo Γ_0 che contiene G_0 come sottogruppo invariante (d'indice 48) è il gruppo completo delle sostituzioni di 1ª e 2ª specie a coefficienti interi nel campo di Gauss e col determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ eguale ad una delle unità $\pm 1\,, \pm i$.

(¹) Nelle prime due linee scriviamo quelle di un sottogruppo diedrale G_8.