# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XVIII.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

ripartirle in tre generi. Così facendo, la famiglia dei Fillosserini verrebbe però ad essere divisa in generi, tutti o quasi tutti con una sola specie: ma io ritengo che approfondendo lo studio dei caratteri minori di queste forme nelle varie località, ognuna di esse verrà a subire un'ulteriore scissione in specie.

**Fisica.** — *Sulle scariche oscillatorie.* Memoria del Socio A. Battelli e L. Magri.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

**Storia delle matematiche.** — *Bonaventura Cavalieri e la costruzione lineare delle coniche.* Nota di F. Amodeo, presentata dal Corrispondente E. Pascal.

Pareva finora che in quell'epoca gloriosa del 1640, in cui la Francia segnava uno dei periodi più memorabili della geometria sintetica, colle opere di Desargues [1] e di Pascal, l'Italia fosse rimasta inerte e noncurante di tanto slancio geometrico ed avesse rivolta la sua attenzione soltanto alle scienze sperimentali ed all'astronomia, all'idraulica, al calcolo integrale, alla meccanica applicata, al meccanismo del corpo degli animali ed alla restituzione delle più antiche opere classiche geometriche con Galilei, Castelli, Torricelli, Cavalieri, Borelli e Viviani.

Invece non è così, e qui ci proponiamo di far vedere che in quella stessa epoca in cui la Francia segnava l'inizio della moderna geometria sintetica, l'Italia ne segnava, per così dire, il completamento mediante l'ingegno portentoso del padre gesuato, milanese, Bonaventura Cavalieri, il quale aveva il gusto di cercare, non le grandi cose, ma le piccole e minute cose, che dovevano generare le grandi. Egli si era occupato di geometria delle coniche, fin da quando fu a Pisa iniziato dal Castelli agli studî delle matematiche, scrivendo lo *Specchio ustorio*; ma in questo egli si era contentato di dimostrare le costruzioni per moto continuo ideate dal Keplero per la parabola e l'iperbole conforme a quella già nota dell'ellisse dichiarandosi contento di averlo fatto pel primo; avea cercato di dimostrare la possibile effettuazione della *linea ustoria* ideata dal napoletano Giov. Batt. della Porta, avea annunziato delle trasformazioni non proiettive di ellissi in parabole, di parabole in iperbole e di iperbole in altre iperbole, ed era passato

[1] Cfr. Amodeo, *Nuova analisi del trattato delle coniche di Gérard Desargues e cenno su J. B. Chauveau.* Rend. Acc. Sc. Napoli, 1906.

oltre, cercando di evitare con cura di esser accusato di plagio. Non è però in questo primo saggio che il suo acume geometrico avea giganteggiato. Esso si manifesta quando Cavalieri meno lo avrebbe sospettato, quando egli tratta di applicare i suoi indivisibili alla quadratura della *spirale* di Archimede. Qui con una genialità abbagliante, per dimostrare che l'area racchiusa fra il primo giro della spirale e l'asse è $1/3$ del cerchio che lo contiene, tenendo fissi gli *argomenti* dei diversi punti della curva nella loro origine sull'asse, egli li rettifica perpendicolarmente all'asse e mostra che gli estremi di questi argomenti si trovano su una parabola e che quindi la spirale si è trasformata in una parabola. Deduce da ciò il teorema dell'area, e subito dopo egli perviene, con la sua sagacia, a ritrovare in questa trasformazione una costruzione della parabola, che comincia a spezzare il cerchio di ferro entro cui il metodo degli antichi aveva chiuso le sezioni coniche, poichè alle costruzioni fatte col compasso, le sole che per 20 secoli si erano sapute usare, sostituisce una costruzione fatta soltanto con linee rette [1].

Questa costruzione è pubblicata nello Scolio 2 della Prop. 9 del Libro sesto della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quodam ratione promota*, da lui stampata nel 1635; ma è dimostrato che fin dal 1623 (19 aprile) egli aveva mandato al Galileo il manoscritto che conteneva questa sua ricerca sulla spirale, che nel 1625 l'aveva comunicato a Cesare Marsili, che nel 1627 tutta l'opera era stata mandata a mons. Ciampoli a Roma per darla alla stampa e che nel 27/2 1629 fu rimandata al Marsili come titolo per poter succedere al Magini nella cattedra di Bologna [2]. Cosicchè la priorità di questa costruzione su quelle che Mydorge pubblicava nel suo trattato delle sezioni coniche [3], anche nel caso che esse siano contenute nella prima edizione del 1631 di questo trattato, rimane fuori di ogni discussione.

All'epoca in cui Cavalieri pubblicava la sua *Geometria indivisibilibus*, egli non era riuscito a fare un passo egualmente ardimentoso per le due altre sezioni coniche, quantunque egli, convinto della grande importanza di ottenere un'analoga costruzione per le altre due curve, ci pensasse a lungo. Ed il suo cervello era tale che non poteva non riuscire, e quando finalmente raggiunse la desiderata costruzione egli confessò che questa scoperta gli dette un vivo piacere e la comunicò al Torricelli e a Gian Antonio Rocca, i quali, come egli stesso afferma, la modificarono subito in altra più elegante. Il

(1) Cfr. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson*. Atti Ist. tecn. di Napoli, 1905, pp. 19-69.

(2) Cfr. Favaro, *Bonaventura Cavalieri e la quadratura della spirale*. Rend. Ist. Lombardo, 1905.

(3) *Claudii Mydorgii patricii parisini conicorum*, stampato in due libri nel 1631, ed in quattro libri nel 1639. A me è riuscito di consultare soltanto la seconda edizione del 1639.

Cavalieri ha consegnato ai posteri questa costruzione nella sesta delle sue *Exercitationes geometricae sex* (¹) (1647) con queste precise parole:

« Dum meae Geometriae Ind. Librum Sextum contexerem inudi in mo-« dum describendae parabolae satis facilem, quam in eo Libro Scolio 2 « Prop. 9 studiosis postmodum communicavi. Diù dolui non posse pariter « hyperbolam, & ellipsim tam facili ratione describi. At deniq; animadverti « idem in ijs quoq; perfici posse, quod mihi non parum attulit voluptatis. « Hunc ergo modum hic palam faciendum ad publicam utilitatem duxi, « quod praemissa sequenti Lemmatica Propositione nunc praestabo » (cfr. l. c., pag. 445).

Ed alla fine (a pag. 451) dice:

« Cum superiorem praxim ex me quoque intellexissent Torricellius & « Roccha eiusdem ipsi quoque diversam à superiori elegantemque rationem « attulerint ».

Eppure una così interessante scoperta, tanto apertamente annunziata, ha potuto rimanere trascurata, e Bonaventura Cavalieri, la cui fama come inventore e creatore del calcolo integrale, non è stata mai messa in dubbio, ma soltanto annebbiata dalla penosa difficoltà che s'incontra a leggere ed intendere l'opera sua sugli indivisibili, non è mai stato reputato degno, come geometra delle coniche, di stare in rango con Desargues e Pascal, mentre si potrebbe financo considerarlo come il precursore di Steiner.

Come ciò possa essere avvenuto si può spiegare nel seguente modo:

Il grande storico della geometria Michel Chasles, che tutti meritamente onorano per l'incremento che seppe dare al progresso della geometria con le sue ricerche storiche, e le applicazioni che ne seppe fare, e pel quale con fine senso di giustizia la Francia creava una cattedra di geometria superiore, non ebbe opportunità d'intuire a fondo tutta l'importanza del contributo che Cavalieri dava alla geometria delle coniche; poichè egli parlando di Cavalieri ha poco misurate le parole nel confronto del vero merito di lui. Egli non dedica nella sua famosa *Aperçu historique* che un paragrafo di poche righe, 10 in tutto, al nostro grande italiano; riconosce che la geometria degli indivisibili venne ad arricchire la scienza e segnare l'epoca dei grandi progressi fatti nei tempi moderni, ma aggiunge, allontanandosi molto dal vero: « Questo metodo adatto alla determinazione delle aree, dei volumi, « dei centri di gravità dei corpi e che ha supplito per 50 anni con van-« taggio al calcolo integrale, non era come l'ha fatto vedere Cavalieri stesso, « che un'applicazione felice o piuttosto una trasformazione del metodo di « esaustione » (²). Qui, se Chasles ha ragione sulla affinità che egli trova

(¹) La *sesta esercitazione* è una miscellanea di questioni diverse. La prima è dedicata alla costruzione che qui citiamo ed è intitolata: *De modo facili describendi Sectiones Conicas, et in omnibus uniformi,* ed occupa da pag. 445 a pag. 451.

(²) Cfr. Chasles, *Aperçu historique,* pag. 57 della seconda ediz.

tra il metodo di Cavalieri e quello di Archimede, ragione che gli si può concedere maggiormente ora che la moderna scoperta della *Metodologia* di Archimede ha fatto conoscere il metodo di ricerca del grande siracusano (¹), non ha però ragione nel dire che il metodo di Cavalieri suppliva per 50 anni il calcolo integrale. Il metodo di Cavalieri invece creava e poneva le basi solidissime del calcolo integrale, ed indipendentemente dal calcolo differenziale, e ciò 50 anni prima che al calcolo differenziale si fosse pensato: ed esso è tale che si potrebbe far rivivere tal quale per adottarlo nell'insegnamento di quelle scuole ove non è possibile insegnare il calcolo differenziale, come sono per esempio le scuole professionali medie.

Un'altra sola volta lo Chasles parla espressamente di Cavalieri, a pag. 100 (²), in occasione del matematico Jean de Witt. Egli vanta il metodo di De Witt per aver ideata la descrizione delle coniche per intersezioni di rette che generalmente erano i lati di angoli mobili, ed aggiunge: « Fin « allora non vi era stata che la parabola che si fosse descritta in tal modo. « L'iperbole e l'ellisse ricavavano la loro generazione dal cerchio direttamente, « o avevano bisogno nelle diverse costruzioni dell'impiego di questa curva. « Intanto dobbiamo dire che Cavalieri aveva già avuta l'idea di cercare per « l'ellisse e per l'iperbole una descrizione con la linea retta, analoga a quella « della parabola, e le sue ricerche avevano avuto un primo successo che « questo geometra confessa avergli cagionato un vivo piacere. Ecco il prin- « cipio del suo metodo, che noi presentiamo con un enunciato più generale, « che lo farà meglio concepire: che si abbia un angolo e che si menino « delle trasversali parallele fra loro: che dai punti ove ciascuna trasversale « incontra i due lati dell'angolo, si menino due rette concorrenti rispettiva- « mente a due punti fissi, queste due rette si taglieranno in un punto che « avrà per luogo geometrico una conica passante per i due punti fissi ».

E fin qui lo Chasles è stato di una fine percezione e chiaroveggenza, e non doveva che dedurne la conseguenza per assurgere alle conclusioni a cui avrebbe dovuto pervenire.

Invece egli continua così:

« Ce n'est pas ce théorème général que Cavalieri démontre, mais seule- « ment l'un de ses cas particuliers; il suppose l'angle droit, les deux points « fixes placés sur les côtés, et la direction des transversales telles que ces « deux points soient les sommets de la courbe ». Qui Chasles ha equivocato sulla posizione dei punti, che non sono sui lati dell'angolo retto e non ha dato un'idea chiara dell'estensione del teorema di Cavalieri. E se l'equivoco può essere benevolmente considerato come un errore di trascrizione, non si

(¹) Cfr. Zeuthen, *Quelques traits de la propagation de la Science de génération en génération*, Rivista di Scienza (« Scientia »), 1909, n. 9, pag. 1.

(²) Cfr. l. c., 2ª ediz.

può con eguale benevolenza scusare l'accenno inadeguato del teorema; poichè dopo che egli ha detto: « Ainsi la pensée qui a dirigé de Witt, dans ses « descriptions des coniques par la ligne droite, n'était pas absolument nou-«velle » ; aggiunge questa grave e non esatta considerazione: « mais Cava-« lieri *s'étant borné à un seul théorème, l'un des plus restreints de cette « théorie*, qui est extrêmement féconde, l'ouvrage de De Witt présente réel-« lement un caractère de nouveauté qui mérité d'être remarqué dans l'his-« toire de la Géométrie ».

Non ci voleva più di tanto per impedire che si riconoscesse il merito della costruzione della coniche ideata da Cavalieri: dopo un giudizio così autorevole più nessuno poteva pensare a rivedere la costruzione di Cavalieri, come infatti è avvenuto, ed invano se ne cercherebbe un accenno nemmeno nelle magistrali opere di Cantor e Zeuthen (1).

Così la svista di un solo, quando questi è una persona autorevole, può tramandare per molto tempo un errore storico. E ciò non si potrà evitare fino a quando l'*Archivio delle Matematiche*, che io ebbi l'onore di proporre al Congresso internazionale dei Matematici a Roma, nell'aprile del 1908, non sarà un fatto compiuto. Ma in quanto riguarda il Cavalieri è tempo ora che egli sia, anche come promotore della moderna geometria proiettiva, messo nella sua vera luce, che non è meno risplendente di quella che, per una strana coincidenza di fatalità, anche con ritardo, fu riconosciuta a Desargues e a Pascal.

Vediamo dunque qual'era la costruzione di Cavalieri riguardante la parabola.

Se A è il vertice (vedi figura 2ª a pag. 666), AC l'asse, AG la tangente al vertice ed E un punto qualunqne della curva, egli completa il parallelogramma ACEG, e segnate sulle rette GE , CE due punteggiate simili, che abbiano per punti corrispondenti G , C ed E per punto unito, proietta la prima da A, la seconda del punto all'infinito della curva ed ha nei punti d'intersezione dei raggi corrispondenti dei due fasci proiettivi la curva voluta.

Questa costruzione fu elegantemente estesa da Torricelli (2) per applicarla alla descrizione della traiettoria di un proiettile, cioè al caso di una parabola di cui sian dati un punto e la tangente in esso, un altro punto e la direzione dei suoi diametri. Supposto A (vedi fig. 1ª, pag. 166) il punto di contatto della tangente AG, ed E un punto qualunque della curva, GE la direzione dei diametri, egli considera le punteggiate simili sulle rette GE , AE, che hanno per punti corrispondenti A , G e per punto unito E , proietta la

(1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig; G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik in XVI und XVII Jahrhundert*, Leipzig, 1903.

(2) Il Torricelli comunicava questa costruzione al Magiotti in Roma in data 8/1 1640 (cfr. Ghinassi, *Lettere e vita di Torricelli*, Firenze, 1864) e la inseriva a pag. 221 dell'opera pubblicata il 1644, nel trattato *De Motu gravium*...

prima da A, e la seconda dal punto all'infinito della retta GE ed ottiene la curva per intersezione dei raggi corrispondenti dei due fasci proiettivi.

Questa costruzione della parabola per fasci proiettivi era la prima che si fosse ideata, ma i precedenti citati, avendo messo anche me su falsa strada, me l'aveva fatta attribuire a Mydorge [1]. Questi ha il merito invece di avere trovate, dopo del Cavalieri, altre tre costruzioni della parabola per fasci proiettivi, tutte sullo stesso tipo [2], cioè sempre mediante l'intersezione dei raggi corrispondenti di due fasci che proiettano due punteggiate simili,

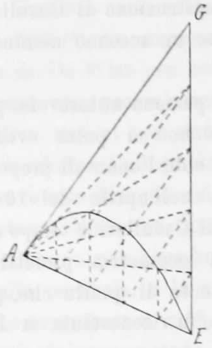


Fig. 1.

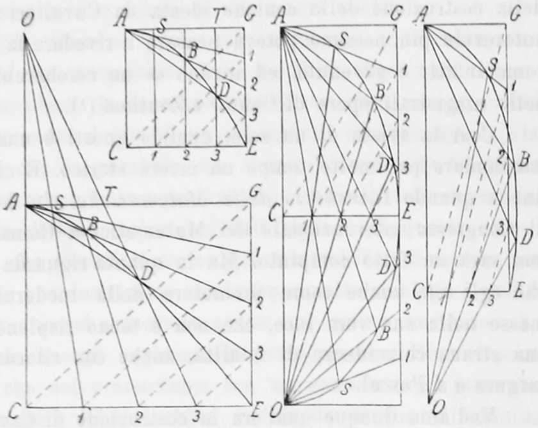


Fig. 2.

una da un punto proprio, l'altra dal punto all'infinito della parabola: delle quali la terza coincide completamente con quella di Torricelli, senza però fare accenno alla esistenza della tangente in A.

La costruzione lineare della parabola era dunque assodata e restava a trovare quella delle altre due coniche. Il merito di aver costruito linearmente l'ellisse e l'iperbole era stato attribuito da me [3] come dal Dingeldey [4] a l'Hospital, perchè si trova la detta costruzione nell'opera di lui pubblicata dopo la sua morte, nel 1707, col titolo: *Traité analytique des Sections coniques*. In quest'opera l'Hospital prima (a pag. 100) inserisce una costruzione delle tre coniche sul tipo di quella di De Witt, ottenuta facendo rotare un angolo retto intorno a un vertice della conica, e trovando l'intersezione di un lato di esso con la retta che dall'altro vertice della conica proietta il punto d'intersezione dell'altro lato dell'angolo con una retta

(1) Cfr. Amodeo, *I trattati*... l. c., pag. 26 dell'estratto.
(2) Cfr. Mydorge, l. c., libro II, pag. 28 e segg.
(3) Cfr. Amodeo, *I trattati*... l. c., pag. 43 dell'estratto.
(4) F. Dingeldey, *Encyclopädie d. Mathem. Wiss.*, Bd. III, C. 1, pag. 13.

assegnata perpendicolarmente all'asse che passa per i due vertici indicati; e poi (a pag. 103) mostra che proiettando da un estremo di un asse la punteggiata esistente sulla tangente nell'altro estremo di esso, e da questo estremo la punteggiata ad essa eguale opportunamente posta su una parallela all'asse situata ad una determinata distanza si hanno nelle intersezioni dei raggi corrispondenti i punti della conica.

Ma adesso resta assodato che il merito di aver fatto questo passo ardimentoso, che sopprimeva la difficoltà di ricorrere al compasso per costruire le coniche a centro, è esclusivamente del nostro grande Cavalieri, e ciò non più tardi del 1641 [1], e con un metodo più generale di quello escogitato dallo stesso Hospital tanto tempo dopo, e valevole per tutte le coniche.

Per esporre la costruzione di Cavalieri riprodurremo qui la sua stessa figura (fig. 2ª della pag. 166) aggiungendovi soltanto le linee tratteggiate CG, 11, 22, 33, di cui egli si è servito per la dimostrazione della regola in altra figura. Egli dice:

Se si vuol costruire una conica a centro di cui siano dati gli estremi di un diametro AO ed un punto E, e la direzione del diametro coniugato ad AO, si tirino per E la retta EG parallela al diametro AO e la retta EC parallela al diametro coniugato ad esso, e si completi il parallelogramma ACEG; indi con rette parallele alla diagonale CG si determinino sulle rette CE, GE le due punteggiate simili 123 E, 123 E e si proietti la prima da O, la seconda da A; si avranno nei punti d'intersezione S, B, D dei raggi corrispondenti dei fasci (A) ed (O) i punti della curva.

La figura del Cavalieri potrebbe far ritenere che egli volesse limitare la sua costruzione alla conica data dall'asse e da un punto, ma tanto il ragionamento fatto, quanto la dimostrazione, non ammettono queste restrizioni, ed anzi l'ultimo disegno a destra mostra che Cavalieri si è preoccupato di far notare che la sua costruzione non era limitata solo al caso che il punto E fosse un vertice della conica, ma che poteva essere un qualunque suo punto. Nè le costruzioni di De Witt sono da ritenersi piú vantaggiose di quelle di Cavalieri, perchè il De Witt ottiene le diverse coniche con costruzioni differenti dipendenti o dalla rotazione di un angolo costante intorno al vertice o dallo strisciamento di un angolo costante con un lato su una retta, o dalla traslazione rettilinea di un segmento costante, e le costruzioni, che sono diverse per la parabola e per l'iperbole e non sono nemmanco estese all'ellisse, risultano tali che la generazione proiettiva delle coniche non risulta evidente ed immediata come in Cavalieri. Dippiù il Cavalieri dimostra la sua costruzione in modo che si può enunciare il teorema:

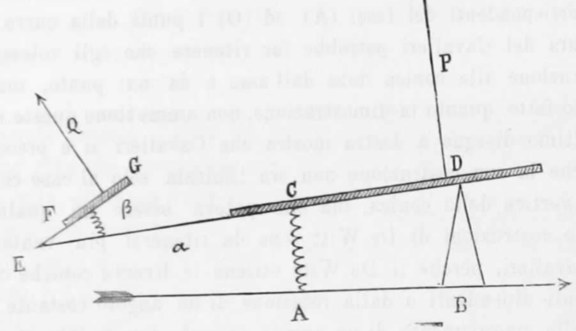
[1] Questa costruzione dell'ellisse e dell'iperbole fu comunicata da Cavalieri a G. Antonio Rocca nei primi mesi del 1641 (cfr. Favaro, *Gian Antonio Rocca*. Ann. Istituto Veneto, 1906).

*Proiettando i punti della conica da* O *e da* A *si ottengono due fasci che determinano sulle rette* GE, CE *due punteggiate simili;* e si può ora aggiungere, *quindi sono proiettivi;* sicchè pare addirittura, nel leggere quella *esercitazione* di essere trasportati ai tempi di Steiner, cioè quasi due secoli dopo.

Anzi se si aggiunge che Desargues aveva ricavata la sua teoria dei *poli e polari* rispetto alle coniche, dalla proiezione delle figure che riguardavano la teoria di *centro e diametri*, mostrando che le proprietà proiettive che si enunciano per gli estremi di un diametro reggono per qualunque coppia di punti di una conica, bisogna convenire che la teoria della generazione proiettiva delle coniche, che soltanto coll'opera di Steiner [1] prese così generale sviluppo, era già virtualmente compresa nella costruzione di Cavalieri.

## Meccanica applicata. — *Modo d'intensificare gli effetti dell'attacco elastico in un aeroplano.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrispondente V. Reina.

In due recenti lavori [2] ho trattato di un'idea del capitano Crocco, la quale oggi ritorna, dopo lungo silenzio, in onore, ed è applicata con successo da costruttori stranieri, che (probabilmente per equivoco) la considerano come propria.




Non credo cosa inutile nè inopportuna far vedere come quell'idea possa acquistare estensione; e descriverò pertanto un apparecchio, che può presentarsi come un buon accessorio nella costruzione di alcuni tipi d'aeroplani.

L'asse AB è rigidamente collegato coll'asse dell'aeroplano; l'asse dell'aeroplano si suppone sulla direzione del movimento, il quale avviene con

(1) Steiner, *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten...*, Berlin, 1832, pag. 139.

(2) *Sopra un brevetto...*, ecc.; *Effetto dell'attacco elastico...*, ecc. Questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 9 e 10.