ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Generalmente la quantità di clorioni formatisi era maggiore quando l'emulsione era messa in tutti e tre i vasi, vale a dire quando sin dal principio il cloroformio veniva a contatto dell'elettrodo metallico.

Ma siccome la scomposizione del cloroformio avviene anche quando l'emulsione di esso viene messa nel vaso di mezzo, bisogna ammettere che il cloroformio migri verso il vaso I, presenta cioè trasporto anodico.

Il fatto da me osservato, cioè *la migrazione anodica del cloroformio sottoposto* (allo stato in parte di soluzione e in parte di emulsione) *all'azione di un forte campo elettrico, e la scomposizione elettrolitica di esso all'anodo con formazione di acido cloridrico*, m'interessa oltre che per sè stesso, anche perchè ne viene di conseguenza che, quando si usa il cloroformio per impedire la putrefazione di liquidi organici tenuti a dializzare per molto tempo, siccome il cloroformio è fortemente assorbito [1] dalle proteine e da altri colloidi, è necessario scacciarlo interamente da questi liquidi mediante il vuoto, prima di servirsene in ricerche di trasporto elettrico.

Meccanica. — *Sulle equazioni generali della dinamica.* Nota del prof. P. Burgatti, presentata dal Socio V. Cerruti.

In questa Nota si cercano le equazioni generali del moto d'un sistema qualunque olonomo o non-olonomo, sotto una forma tale da contenere, come caso particolare, le ordinarie equazioni di Lagrange e di Hamilton. Il problema non è nuovo; fu trattato già da varî autori: principalmente da Boltzmann [2] e da Hamel [3]. Ma il metodo qui seguìto, prendendo le mosse da una nuova enunciazione del problema, è più diretto dei precedenti, e presenta taluni vantaggi; non ultimo quello di eliminare ogni considerazione non strettamente connessa alla questione e ogni artifizio che nasconda la vera essenza analitica delle trasformazioni che si operano.

Per abbreviare i calcoli, cominciamo a considerare un sistema olonomo con vincoli indipendenti dal tempo; si vedrà poi quali sono le modificazioni da farsi nel caso più generale. Se

$$L_1 = 0\,, L_2 = 0\,, \ldots, L_k = 0\,. \tag{1}$$

sono le equazioni dei vincoli, le equazioni del moto, quali risultano dalla di-

[1] B. Moore and H. E. Roaf. Proceed. of the Roy. Soc., vol. 73, pag. 382, 1904; B, vol. 77, p. 86, 1905; Thomson Yates and Johnston Laboratories Report., vol. VI, parte 1ª, pag. 151, 1905.

[2] Wiener Ak. Sitzungberichte, 1902. V. anche Wittaker, *Analytical Dinamics*, § 30.

[3] *Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik*. Zeitschrift f. Math. u. Phys. B. 50, 1904. In questa Memoria trovasi un'ampia bibliografia. Vedi anche Appell, *Les mouvements de roulement*. Scientia.

retta applicazione dei principi di D'Alembert e dei lavori virtuali, sono

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial L_j}{\partial x_i} \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial L_j}{\partial y_i} \qquad (i = 1, 2, \dots n). \\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial L_j}{\partial z_i}
\end{aligned}
$$

Proponiamoci di risolvere la questione seguente: Sostituire alle (1) e (2) un sistema di equazioni del primo ordine che non contengano più i moltiplicatori λ.

A tal fine aggiungiamo alle relazioni

$$
(3) \qquad \sum_i \left(\frac{\partial L_j}{\partial x_i} x'_i + \frac{\partial L_j}{\partial y_i} y'_i + \frac{\partial L_j}{\partial z_i} z'_i \right) = \xi_j = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, k)
$$

le seguenti:

$$
(3') \qquad \sum_i (a_{ri} x'_i + b_{ri} y'_i + c_{ri} z'_i) = u_r, \qquad (r = k+1, \dots, 3n)
$$

ove le a_{ri}, b_{ri}, c_{ri} sono funzioni delle x, y, z, e le u_r certe $3n - k$ nuove variabili. La risoluzione delle (3) e (3') darà luogo a equazioni della forma

$$
(4) \qquad x'_i = \sum_{s=k+1}^{3n} \alpha_{si} u_s, \quad y'_i = \sum_s \beta_{si} u_s \quad z'_s = \sum_s \gamma_{si} u_s;
$$

perciò si avrà identicamente

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
& \sum_j (a_{ri} \alpha_{ri} + b_{ri} \beta_{ri} + c_{ri} \gamma_{ri}) = 1 \\
& \sum_j (a_{ri} \alpha_{si} + b_{ri} \beta_{si} + c_{ri} \gamma_{si}) = 0 \quad (r \neq s) \\
& \sum_j \left(\frac{\partial L_j}{\partial x_i} \alpha_{si} + \frac{\partial L_j}{\partial y_i} \beta_{si} + \frac{\partial L_j}{\partial z_i} \gamma_{si} \right) = 0 \\
& \qquad \left(\begin{matrix} r, s = k+1, \dots, 3n \\ j = 1, 2, \dots, k \end{matrix} \right).
\end{aligned}
$$

Si noti che, inversamente, i secondi membri delle (4) si ridurranno ai rispettivi primi membri quando alle u si sostituiscano i loro valori; ma non identicamente, bensì in virtù delle (3).

Ciò posto, moltiplicando le (2) ordinatamente per $\alpha_{ri}, \beta_{ri}, \gamma_{ri}$ e sommando si ottiene

$$\sum_i m_i \left(\alpha_{ri} \frac{dx'_i}{dt} + \beta_{ri} \frac{dy'_i}{dt} + \gamma_{ri} \frac{dz'_i}{dt} \right) =$$

$$= \sum_i (X_i \alpha_{ri} + Y_i \beta_{ri} + Z_i \gamma_{ri}) + \sum_j \lambda_j \sum_i \left(\frac{\partial L_j}{\partial x_i} \alpha_{ri} + \cdots \right).$$

Per la (5) l'ultima somma è nulla; talchè, posto

$$\sum_i (X_i \alpha_{ri} + Y_i \beta_{ri} + Z_i \gamma_{ri}) = U_r,$$

si ha

$$\sum_i m_i \left(\alpha_{ri} \frac{dx'_i}{dt} + \beta_{ri} \frac{dy'_i}{dt} + \gamma_{ri} \frac{dz'_i}{dt} \right) = U_r.$$

Ma

$$\alpha_{ri} = \frac{\partial x'_i}{\partial u_r} \quad \text{e analoghe};$$

e

$$\alpha_{ri} \frac{dx'_i}{dt} = \frac{d}{dt} (\alpha_{ri} x'_i) - x'_i \frac{d\alpha_{ri}}{dt} \quad \text{e analoghe};$$

per conseguenza, posto

$$2T = \sum_i m_i (x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i),$$

si ottiene

$$(6) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_r} - \sum_i m_i \left(x'_i \frac{d\alpha_{ri}}{dt} + y'_i \frac{d\beta_{ri}}{dt} + z'_i \frac{d\gamma_{ri}}{dt} \right) = U_r$$
$$(r = k + 1 \ldots 3n).$$

Ora, essendo T funzione delle u (quadratica, con coefficienti dipendenti dalle coordinate), e $m_i x'_i = \frac{\partial T}{\partial x'_i}$, si sarebbe tentati di scrivere

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x'_i};$$

tanto più che l'uso di questa formula conduce a risultati giusti nel caso dei sistemi olonomi, e ne vedremo la ragione; ma è facile comprendere che per essere esatti bisogna scrivere

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = \sum_{s=k+1}^{3n} \frac{\partial T}{\partial u_s} \frac{\partial u_s}{\partial x'_i} + \sum_{h=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \xi_h} \frac{\partial \xi_h}{\partial x'_i},$$

talchè abbiamo infine

$$m_i x_i' = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} a_{si} + \sum_h \frac{\partial T}{\partial \xi_h} \frac{\partial L_h}{\partial x_i}. \tag{7}$$

Allora la somma che comparisce nella (6), e che indicheremo con S_r, diventa

$$S_r = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_i \left(a_{si} \frac{d\alpha_{ri}}{dt} + b_{si} \frac{d\beta_{ri}}{dt} + c_{si} \frac{d\gamma_{ri}}{dt} \right) + \\ + \sum_h \frac{\partial T}{\partial \xi_h} \sum_i \left(\frac{\partial L_h}{\partial x_i} \frac{d\alpha_{ri}}{dt} + \frac{\partial L_h}{\partial y_i} \frac{d\beta_{ri}}{dt} + \frac{\partial L_h}{\partial z_i} \frac{d\gamma_{ri}}{dt} \right), \tag{8}$$

tralasciando la limitazione degl' indici, che si troverà indicata una volta per sempre. Posto

$$S_r = M_r + N_r,$$

calcoleremo la prima parte M_r, il calcolo della seconda essendo identico.

A tal fine osserviamo che

$$\frac{d\alpha_{ri}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_j} x_j' + \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial y_j} y_j' + \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial z_j} z_j' \right) \text{ (e analoghe)},$$

e

$$x_j' = \sum_{l=k+1}^{3n} \alpha_{lj} u_l \quad \text{(e analoghe)};$$

perciò sostituendo e ordinando opportunamente si trova

$$M_r = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j \sum_i \left\{ \alpha_{lj} \left(a_{si} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial x_j} + b_{si} \frac{\partial \beta_{ri}}{\partial x_j} + c_{si} \frac{\partial \gamma_{ri}}{\partial x_j} \right) + \\ + \beta_{lj} \left(a_{si} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial y_j} + \cdots \right) + \gamma_{lj} \left(a_{si} \frac{\partial \alpha_{ri}}{\partial z_j} + \cdots \right) \right\};$$

od anche, in virtù delle (5),

$$M_r = - \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j \sum_i \left\{ \alpha_{lj} \left(a_{ri} \frac{\partial a_{si}}{\partial x_j} + b_{ri} \frac{\partial \beta_{si}}{\partial x_j} + c_{ri} \frac{\partial \gamma_{si}}{\partial x_j} \right) + \\ + \beta_{lj} \left(\alpha_{ri} \frac{\partial a_{si}}{\partial y_j} + \cdots \right) + \gamma_{lj} \left(\alpha_{ri} \frac{\partial a_{si}}{\partial z_i} + \cdots \right) \right\}. \tag{9}$$

D'altra parte poniamo

$$P_r = \sum_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \alpha_{ri} + \frac{\partial T}{\partial y_i} \beta_{ri} + \frac{\partial T}{\partial z_i} \gamma_{ri} \right),$$

e calcoliamo quest'espressione. Si ha intanto

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \sum_j \left(\frac{\partial T}{\partial x_j'} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial y_j'} \frac{\partial y_j'}{\partial x_i} + \frac{\partial T}{\partial z_j'} \frac{\partial z_j'}{\partial x_i} \right) \text{ (e analoghe)};$$

e in virtù delle (7),

$$\frac{\partial T}{\partial x_j} = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_j \left(a_{sj} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} + b_{sj} \frac{\partial y'_j}{\partial x_i} + c_{sj} \frac{\partial z'_j}{\partial x_i} \right) + \\ + \sum_h \frac{\partial T}{\partial \xi_h} \sum_j \left(\frac{\partial L_h}{\partial x_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial L_h}{\partial y_j} \frac{\partial y'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial L_h}{\partial z_j} \frac{\partial z'_j}{\partial x_i} \right);$$

quindi sostituendo in P_r, esso risulta la somma delle due parti seguenti:

$$T_r = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \sum_j \left(a_{sj} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} + \cdots \right) + \right. \\ \left. + \beta_{ri} \sum_j \left(a_{sj} \frac{\partial x'_j}{\partial y_i} + \cdots \right) + \gamma_{ri} \sum_j \left(a_{sj} \frac{\partial x'_j}{\partial z_i} + \cdots \right) \right\}$$

$$\mathfrak{T}_r = \sum_h \frac{\partial T}{\partial \xi_h} \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \sum_j \left(\frac{\partial L_h}{\partial x_j} \frac{\partial x'_j}{\partial x_i} + \cdots \right) + \beta_{ri} \cdots \right. \\ \left. + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \right\}.$$

Consideriamo la T_r; chè ciò che si dice per essa, vale anche per la $\mathfrak{T}_r$. Essendo

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_i} = \sum_l \frac{\partial \alpha_{lj}}{\partial x_i} u_l \text{ (e analoghe),}$$

si ha, sostituendo e ordinando opportunamente,

$$T_r = \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \left(a_{sj} \frac{\partial \alpha_{lj}}{\partial x_i} + b_{sj} \frac{\partial \beta_{lj}}{\partial x_i} + c_{sj} \frac{\partial \gamma_{lj}}{\partial x_i} \right) + \right. \\ \left. + \beta_{ri} \left(a_{sj} \frac{\partial \alpha_{lj}}{\partial y_i} + \cdots \right) + \gamma_{ri} \left(a_{sj} \frac{\partial \alpha_{lj}}{\partial z_i} + \cdots \right) \right\};$$

od anche, in virtù delle (5),

$$T_r = - \sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \left(\alpha_{lj} \frac{\partial a_{sj}}{\partial x_i} + \beta_{lj} \frac{\partial b_{sj}}{\partial x_i} + \gamma_{lj} \frac{\partial c_{sj}}{\partial x_i} \right) + \right. \\ \left. + \beta_{ri} \left(\alpha_{lj} \frac{\partial a_{sj}}{\partial y_i} + \cdots \right) + \gamma_{ri} \left(\alpha_{lj} \frac{\partial a_{sj}}{\partial z_i} + \cdots \right) \right\} \tag{10}$$

Se ora si pone per brevità

$$E^r_{sj} = \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{sj}}{\partial x_i} \right) + \beta_{ri} \left(\frac{\partial b_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{sj}}{\partial y_i} \right) + \gamma_{ri} \left(\frac{\partial c_{si}}{\partial x_j} - \frac{\partial a_{sj}}{\partial z_i} \right) \right\}$$

$$F^r_{sj} = \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial y_j} - \frac{\partial b_{sj}}{\partial x_i} \right) + \beta_{ri} \left(\cdots\cdots \right) + \cdots\cdots \right\}$$

$$G^r_{sj} = \sum_i \left\{ \alpha_{ri} \left(\frac{\partial a_{si}}{\partial z_j} - \frac{\partial c_{si}}{\partial x_i} \right) + \cdots\cdots\cdots\cdots \right\},$$

dalla sottrazione delle (9) e (10) si trae subito

$$(11) \qquad -\mathrm{M}_r + \mathrm{T}_r = \sum_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j (\alpha_{lj}\, \mathrm{E}^r_{sj} + \beta_{lj}\, \mathrm{F}^r_{sj} + \gamma_{lj}\, \mathrm{G}^r_{sj}) .$$

Dopo ciò si vede immediatamente che lo stesso calcolo applicato alle N_r e $\mathfrak{T}_r$ porta alla conclusione

$$\mathrm{N}_r - \mathfrak{T}_r = 0 ,$$

giacchè le E_{sj}, F_{sj}, G_{sj} corrispondenti sono nulle identicamente. Allora

$$\mathrm{S}_r = \mathrm{M}_r + \mathrm{N}_r = \mathrm{M}_r - \mathrm{T}_r + \mathrm{T}_r + \mathfrak{T}_r = \mathrm{M}_r - \mathrm{T}_r + \mathrm{P}_r ;$$

ossia per la (11)

$$\mathrm{S}_r = \mathrm{P}_r - \sum_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j (\alpha_{lj}\, \mathrm{E}^r_{sj} + \beta_{lj}\, \mathrm{F}^r_{sj} + \gamma_{lj}\, \mathrm{G}^r_{sj}) .$$

In seguito a ciò le equazioni (6) del moto diventano

$$(12) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_r}\right) - \mathrm{P}_r = \mathrm{U}_r - \sum_s \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_s} \sum_l u_l \sum_j (\alpha_{lj}\, \mathrm{E}^r_{sj} + \beta_{lj}\, \mathrm{F}^r_{sj} + \gamma_{lj}\, \mathrm{G}^r_{sj})$$
$$(r = k + 1 , \dots , 3n) .$$

Queste equazioni insieme colle seguenti

$$(12') \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_s \alpha_{si}\, u_s \quad , \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_s \beta_{si}\, u_s \quad , \quad \frac{dz_i}{dt} = \sum_s \gamma_{si}\, u_s$$
$$(i = 1 , 2 , \dots , n) ,$$

formano un sistema di $6n - k$ *equazioni del prim'ordine* tra le $6n - k$ funzioni $x_i\, y_i\, z_i\, (i = 1 , 2 , \dots , n)$ e $u_s (s = k + 1 , \dots , 3n)$; sistema che si riduce in sostanza a $2(3n - k)$ equazioni differenziali, perchè ammette evidentemente gl'integrali (o meglio le relazioni invarianti) $\mathrm{L}_1 = 0 , \mathrm{L}_2 = 0 , \dots , \mathrm{L}_k = 0$. Il problema proposto è risoluto nel modo più generale. In altra Nota mostrerò che le (12) e (12'), convenientemente interpretate, valgono anche per i sistemi non olonomi.