# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XVIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

si spostano affatto, o si spostano pochissimo, si fissano poco lungi dal punto ove avevano passato l'inverno, e vi maturano producendo tuberosità.

Tutte le ibernanti che sopravvivono, diventano, come sopra si è detto, madri attere virginopare. Mentre ha luogo questa prima generazione è avvenuta nella pianta l'emissione di radichette nuove. Per lo più su queste si portano le prime neonate dell'anno e vi producono le prime nodosità le quali dunque succedono alle prime tuberosità annuali. Questa migrazione delle neonate in cerca di alimento non è però caratteristica della generazione primaverile, ma si verifica in tutte le generazioni.

Una volta fissate non si spostano più se non eccezionalmente. Migrano invece le ninfe.

***

IX. Le nostre osservazioni precedenti, relative alla maniera di produzione delle galle per parte della fillossera ci avevano fatto ammettere la possibilità delle punture in cerchio, senza permetterci di dimostrarla. Questa dimostrazione ci è stata possibile ora prendendo in esame non le Du Lot, come facevamo precedentemente, ma le foglioline delle altre viti americane, suscettibili di galle. Mantenendo vive alcuni giorni in camera umida foglioline su cui eransi di recente attaccate neogallicole-gallicole, abbiamo potuto vedere con tutta chiarezza che esse pungono in punti differenti disposti in cerchio. L'osservazione del fenomeno era facilitata dal fatto che le galle iniziate restavano aperte per la mancanza di accrescimento della foglia. Le varie punture si seguono ad intervalli lunghi alcune ore (in un giorno si notano tre o quattro posizioni differenti di una stessa fillossera).

## Matematica. — *Sulla formula integrale di Fourier*. Nota di Giuditta Graziani, presentata dal Socio V. Volterra.

Il dott. L. Orlando, in una Nota pubblicata nel vol. XVII dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, fa osservare che nel trattato di fisica matematica di Riemann-Weber [1] è contenuto quanto basta per asserire che la formula integrale di Fourier si può considerare stabilita quando sia stabilita la formula preliminare

$$(1) \qquad \int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0 \qquad (a > 0);$$

e, riconoscendo esatta una critica che il sig. Pringsheim [2] fa al procedi-

[1] *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik*. V. il secondo capitolo del primo volume.

[2] Articolo sull'integrale di Fourier inserito nei Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung (B. XVII, 1907).

mento seguìto dal Weber, dimostra in modo rigoroso e semplice che la formula (1) è valida quando la funzione $\psi(\lambda)$ soddisfa a questa condizione:

I. $\psi(\lambda)$ è, da un certo punto in poi, monotòna e tende a zero per $\lambda = \infty$.

Dunque possiamo dire senz'altro che la formula integrale di Fourier

$$(2) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) \cos \alpha(\lambda - x)\, d\lambda = \psi(x)$$

è valida quando è verificata la I e quando $\psi(\lambda)$ soddisfa inoltre alle seguenti condizioni:

II. $\psi(\lambda)$ ha in ogni finito intervallo un numero finito di massimi e di minimi;

III. $\psi(\lambda)$ può in singoli punti diventare infinita purchè relativamente a tali punti si conservi la convergenza dell'integrale

$$\int \psi(\lambda)\, d\lambda$$

(esteso, si capisce, a limiti finiti);

IV. in caso di discontinuità si deve intendere

$$\psi(\lambda) = \frac{\psi(\lambda+0) + \psi(\lambda-0)}{2}.$$

Infatti, quando la funzione $\psi(\lambda)$ verifica le condizioni II, III e IV essa ci rappresenta la funzione arbitraria nel *teorema di Dirichlet*. Allora se consideriamo l'integrale

$$\Phi = \int_0^\infty d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda\, d\lambda,$$

è evidente che possiamo scrivere

$$\Phi = \lim_{\mu=\infty} \int_0^\mu d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda\, d\lambda;$$

e quando $\mu$ si mantenga finito si può invertire l'ordine d'integrazione e sarà

$$\int_0^\mu d\alpha \int_a^b \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda\, d\lambda = \int_a^b \psi(\lambda)\, d\lambda \int_0^\mu \cos \alpha\lambda\, d\alpha = \int_a^b \psi(\lambda) \frac{\sin \mu\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$

e quindi

$$\Phi = \lim_{\mu=\infty} \int_a^b \psi(\lambda) \frac{\sin \mu\lambda}{\lambda}\, d\lambda,$$

e dal teorema di Dirichlet si ha subito

$$(3)\qquad \lim_{\mu=\infty}\int_a^b \psi(\lambda)\,\frac{\sin\mu\lambda}{\lambda}\,d\lambda =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_a^b \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = 0 && \text{per } a\,,b>0\\ &= \tfrac{1}{2}\left[\psi(+0)+\psi(-0)\right] && a>0, b<0\\ &= \tfrac{1}{2}\,\psi(+0) && a=0<b\\ &= \tfrac{1}{2}\,\psi(-0) && a<0=b\,; \end{aligned}$$

ma il valore di $\Phi$ non dipende dal valore di $b$ ma dal suo segno, quindi supponendo $a>0$, sarà

$$(3')\qquad \Phi = \int_0^\infty d\alpha\int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda$$

quando $\psi(\lambda)$ sia tale che il secondo membro di questa formula abbia significato.

Se si dimostra che è

$$(4)\qquad \lim_{b=\infty}\int_0^\infty d\alpha\int_a^b \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \int_0^\infty d\alpha\int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = 0$$

per un valore positivo di $a$, resta stabilito che il secondo membro della formula (3′) ha un significato. Ora, ammesso che sia $a>0$ è condizione sufficiente per la validità della (3′) la condizione I, e questo lo dimostra il dott. Orlando nella Nota citata. Con osservazioni analoghe a queste usate per il caso di $b$ che tende all' $\infty$, si può trattare il caso di $a$ che tende a $-\infty$.

Infine si stabilisce la formula

$$(5)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha\lambda\,d\lambda = \tfrac{1}{2}\left[\psi(+0)+\psi(-0)\right],$$

che equivale a tutte le formule (3) purchè si ponga $\psi(\lambda)=0$ in ogni punto esterno ai limiti $a\,,b$. Se si sostituisce $(\lambda - x)$ in luogo di $\lambda$ nella formula (5) e in caso di discontinuità si intende per $\psi(x)$ la media aritmetica fra $\psi(x+0)$ e $\psi(x-0)$, si ottiene

$$(6)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha\int_{-\infty}^\infty \psi(\lambda)\cos\alpha(\lambda - x)\,d\lambda = \psi(x)$$

che è precisamente la formula integrale di Fourier.

Ma ciò che noi vogliamo far rilevare è che non solo le funzioni *monotòne* o *quasi-monotòne*, come abbiamo già detto e come afferma il signor Pringsheim, sono rappresentabili con la formula (6), ma anche altre funzioni.

Supponiamo, per esempio, che si ponga

$$\Psi(\lambda) = \sum_{\nu} \psi_{\nu}(\lambda) + \sum_{\mu} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \tag{7}$$

dove le $\psi_{\nu}(\lambda)$ verifichino la condizione I e le $\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)$ siano tali che

$$\int_a^{\infty} |\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)|\, d\lambda$$

sia convergente; questa funzione $\Psi(\lambda)$ si può rappresentare con la formula integrale di Fourier. Notiamo intanto che ogni funzione $\psi_{\nu}(\lambda)$ si può rappresentare mediante la formula integrale di Fourier e quindi anche la loro somma sarà rappresentabile con la stessa formula, poichè, come è noto, la somma degli integrali è uguale all'integrale della somma.

Resta a vedersi che cosa succede delle altre funzioni $\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)$ quando, come abbiamo detto, sia

$$\int_a^{\infty} |\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)|\, d\lambda \qquad \text{convergente.}$$

Quando ciò si verifichi possiamo scrivere senz'altro [1]

$$\int_0^{\omega} d\alpha \int_0^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda)\, d\lambda \int_0^{\omega} \cos \alpha\lambda \, d\lambda\,;$$

ma è

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \lim_{\omega=\infty} \int_0^{\omega} d\alpha \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda =$$

$$= \lim_{\omega=\infty} \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda)\, d\lambda \int_0^{\omega} \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \lim_{\omega=\infty} \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \frac{\sin \mu\lambda}{\lambda}\, d\lambda$$

e per il teorema di Dirichlet (sempre quando $\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)$ soddisfi alle condizioni di Dirichlet) si può scrivere

$$\int_0^{\infty} d\alpha \int_a^{\infty} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0 \qquad a > 0\,;$$

e questo basta come si è già detto, per stabilire che anche $\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)$ e quindi $\sum_{\mu} \mathrm{R}_{\mu}(\lambda)$ si può rappresentare mediante la formula integrale di Fourier: quindi tutta l'espressione (7) è rappresentabile con la formula integrale di Fourier quando $\int_a^{\infty} |\mathrm{R}_{\mu}(\lambda)|\, d\lambda$ sia convergente.

Una delle funzioni $\Psi(\lambda)$ alle quali non si potrebbe applicare nè il criterio di Weber, nè quello del sig. Pringsheim, è per es.:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\log(2+\lambda^2)} - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{\sin \lambda^2}{\lambda^2}\,.$$

[1] Riemann-Weber, *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* Volume I, § 11.