ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Fisica. — *Sulle osservazioni sismiche* (¹). Nota del dott. A. Lo Surdo, presentata dal Socio Ròiti.

Condizioni alle quali debbono soddisfare i sismografi per registrare l'accelerazione sismica.

Abbiamo rilevato recentemente l'importanza di determinare l'accelerazione sismica come la causa immediata del moto impresso alla massa inerte del sismografo (²); ed ora ci proponiamo di ricercare se sia possibile che un sismografo registri direttamente l'accelerazione anzichè, come si è tentato di fare finora, lo spostamento del suolo.

Indichiamo con a lo spostamento della massa dalla sua posizione di riposo, con Ω l'accelerazione $-x''$ sulla componente x dello spostamento del suolo, e scriviamo l'equazione del moto sotto la forma:

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega . \tag{1}$$

Le costanti α e β hanno un significato ben definito.

L'accelerazione della forza antagonista per unità dello spostamento a è uguale a β^2, e quindi se le indicazioni del sismografo fossero esatte noi dovremmo avere:

$$\beta^2 a = \Omega .$$

Dobbiamo dunque ricercare le condizioni più opportune affinchè lo spostamento della massa dalla posizione di riposo differisca in ogni istante il meno possibile da quello corrispondente al valore dell'accelerazione sismica Ω, cioè da $\frac{\Omega}{\beta^2}$.

Sia τ un intervallo di tempo abbastanza piccolo perchè si possa ritenere che Ω varii linearmente di una quantità w, cioè che il tratto di curva corrispondente all'intervallo di tempo τ sia rettilineo, e potremo porre:

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{w}{\tau} t$$

per cui la nostra equazione diventa:

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega_0 + \frac{w}{\tau} t . \tag{2}$$

(¹) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Fisica del R. Ist. di Studî super. di Firenze.
(²) Nuovo Cimento, serie 5ª, vol. XVIII, fasc. luglio-agosto 1909.

L'integrale generale di questa equazione lineare del secondo ordine risulta costituito dalla somma di due parti:

1°) un integrale particolare dell'equazione completa;

2°) la funzione complementare, ossia l'integrale generale dell'equazione ridotta omogenea.

Introduciamo nella (2) il simbolo operatore $D = \frac{d}{dt}$ che si può trattare come una quantità algebrica [1], ed essa prende la forma:

$$(D^2 + 2\alpha D + \beta^2)\, a = \Omega_0 + \frac{w}{\tau}\, t\,,$$

dalla quale si ricava:

$$a = \frac{1}{D^2 + 2\alpha D + \beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\, t\right).$$

Sviluppando poi in serie $\frac{1}{D^2 + 2\alpha D + \beta^2}$, e facendo le opportune eliminazioni si ottiene:

$$a = \frac{1}{\beta^2}\left(1 - \frac{2\alpha}{\beta^2} D\right)\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\, t\right)$$

cioè

(3) $$a = \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\, t - \frac{2\alpha}{\beta^2}\frac{w}{\tau}\right)$$

che è un integrale particolare della (2).

La funzione complementare è l'integrale generale dell'equazione:

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = 0\,.$$

Questo integrale rappresenta il moto proprio del sistema oscillante, e, com'è noto, prende diverse forme secondo che l'equazione caratteristica ammette due radici immaginarie, una doppia reale, o due reali e distinte. Il moto quindi è oscillatorio di ampiezze successive decrescenti:

(4) $$a = e^{-\alpha t}\left[A_1 \cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t + B_1 \operatorname{sen} \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t\right]$$

se $\beta^2 > \alpha^2$; crescendo lo smorzamento, il pseudo periodo $T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}$ va aumentando finchè il moto non diviene aperiodico:

(5) $$a = A_2 e^{-\alpha t}\left[1 + B_2 t\right]$$

[1] Vedi A. Russell Forsyth, *Trattato sulle equazioni differenziali*. Traduzione del dott. Arbicone (Livorno, ediz. Giusti), pp. 35 a 40.

il che si ha quando $\beta^2 = \alpha^2$. Continuando a crescere lo smorzamento, il moto, ancora aperiodico:

$$a = e^{-\alpha t}\left[A_3\, e^{+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t} + B_3\, e^{-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t}\right] \tag{6}$$

(per $\beta^2 < \alpha^2$), diviene sempre più lento.

È evidente il vantaggio che si può ricavare mettendosi in condizioni tali che la funzione complementare abbia la forma (5) cui corrisponde il moto critico, poichè allora la massa si avvicina alla posizione che le compete con moto aperiodico, il più rapidamente possibile.

Possiamo dunque ritenere che lo smorzamento critico sia il più conveniente, e stabiliamo perciò di fare $\alpha = \beta$.

Sommando la (3) e la (5) si ottiene l'integrale generale dell'equazione completa:

$$a = A e^{-\beta t}(1 + Bt) + \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\,t - \frac{2}{\beta}\frac{w}{\tau}\right). \tag{7}$$

Le condizioni iniziali siano:

$$a = \frac{\Omega_0}{\beta^2} \quad ; \quad \frac{da}{dt} = 0\,;$$

cioè si supponga che per $t = 0$ la massa si trovi ferma nella posizione alla quale corrisponde esattamente il valore Ω_0 dell'accelerazione in quell'istante; valga cioè il sistema di equazioni

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_0}{\beta^2} &= A + \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 - \frac{2}{\beta}\frac{w}{\tau}\right)\\ 0 &= -\beta A + BA + \frac{1}{\beta^2}\frac{w}{\tau}\,. \end{aligned}$$

Da esso si ricavano i valori:

$$A = \frac{2}{\beta^3}\frac{w}{\tau}\;, \quad B = \frac{\beta}{2}\,,$$

che riducono la (7) alla forma:

$$a = \frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\,t\right) + \frac{1}{\beta^2}\frac{w}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\beta} + t\right)e^{-\beta t} - \frac{2}{\beta}\right]. \tag{8}$$

Osserviamo che la espressione contenuta nel secondo membro si compone di due parti: la prima

$$\frac{1}{\beta^2}\left(\Omega_0 + \frac{w}{\tau}\,t\right) \tag{9}$$

darebbe in ogni istante lo spostamento che corrisponde esattamente al valore dell'accelerazione: essa quindi rappresenterebbe la soluzione idealmente perfetta del problema. E se noi vogliamo che la massa segua il più da vicino possibile questo moto, dovremo fare in modo che la seconda parte:

$$(10) \qquad \frac{1}{\beta^2}\frac{w}{\tau}\left[\left(\frac{2}{\beta}+t\right)e^{-\beta t}-\frac{2}{\beta}\right]$$

abbia un valore piccolissimo. Allora, evidentemente, β dev'essere tanto più grande per quanto più repentine sono le variazioni di Ω, cioè per quanto più grande è il valore di $\frac{w}{\tau}$.

È bensì vero che aumentando β, diminuendo cioè il periodo proprio del sistema oscillante non smorzato $T=\frac{2\pi}{\beta}$, si viene a diminuire la sensibilità del sismografo ossia lo spostamento per unità di accelerazione che è dato da $\frac{1}{\beta^2}$; ma si vede subito che la parte perturbatrice (10) al crescere di β tende più rapidamente a zero che non lo spostamento idealmente perfetto (9) della massa.

Concludendo possiamo dire che *nei sismografi, quando si vuole che la registrazione rappresenti il più fedelmente possibile l'andamento dell'accelerazione sismica, bisogna che il periodo proprio del sistema oscillante sia il più piccolo possibile.*

Supponiamo ora Ω periodica e sviluppabile mediante la serie di Fourier:

$$(11) \qquad \Omega=\Omega_0+\Omega_1 \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{t}{T}-\varepsilon_1\right)+\cdots+\Omega_n \operatorname{sen} 2\pi\left(\frac{nt}{T}-\varepsilon_n\right)+\cdots$$

La rapidità con cui varia ad ogni istante l'accelerazione corrispondentemente all'armonico n^{mo} è:

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_n=\Omega_n\frac{2\pi n}{T}\cos 2\pi\left(\frac{nt}{T}-\varepsilon_n\right)$$

essa raggiunge valori tanto più grandi per quanto maggiore è il prodotto $\Omega_n\frac{n}{T}$. Quindi volendo che la registrazione rappresenti bene la (11), è necessario fare il periodo proprio di oscillazione del sismografo tanto più piccolo per quanto più grande è il prodotto $\Omega_n\frac{n}{T}$, cioè più importanti gli armonici elevati. Alla identica conclusione per questo caso speciale, avremmo potuto giungere anche applicando le considerazioni fatte da Cornu e da Blondel per gli oscillografi.

I sismologi, allo scopo di aumentare il più possibile la sensibilità fanno il periodo proprio dei sismografi molto grande. A dire il vero, si verrebbe a registrare esattamente lo spostamento del suolo qualora si potesse disporre di un sistema la cui sensibilità fosse infinitamente grande, cioè si disponesse di un corpo che al suolo non fosse collegato. Ma in pratica non è possibile andare oltre un certo limite nell'aumentare la sensibilità, e quindi le curve che si ottengono non rappresentano nè lo spostamento nè l'accelerazione.

Volendo che i sismografi registrino l'accelerazione, si va incontro ad una difficoltà per il fatto che, se si diminuisce il periodo proprio conformemente alle conclusioni cui siamo giunti, viene a diminuire anche la sensibilità. Contrariamente a quanto avviene in molti altri apparecchi registratori, come ad esempio gli oscillografi, nei sismografi la forza proporzionale alla quantità fisica che si vuol registrare dipende dalla massa materiale del sistema oscillante, quindi non è possibile evitare la diminuzione di sensibilità, senza modificare il periodo di questo. Ne consegue che nel caso nostro gli spostamenti della massa devono essere necessariamente molto più piccoli che nei sismografi ordinarî. Però siccome la parte mobile di un sismografo si può ridurre molto semplice è facile far sì che quei piccoli spostamenti non vengano alterati a causa delle imperfezioni meccaniche, inevitabili nei sistemi complicati. Ed allora si comprende facilmente come la mancanza di sensibilità possa venir compensata mediante l'applicazione di un fortissimo ingrandimento.

Non è quindi arrischiato l'affermare che in pratica si possa registrare l'accelerazione sismica mediante sismografi di piccolo periodo.

Chimica vegetale. — *Sull'origine e sulla funzione fisiologica dei pentosani nelle piante* (1). Nota di C. Ravenna e O. Cereser, presentata dal Socio G. Ciamician.

Tra i principî immediati dei vegetali, i pentosani, tanto diffusi, costituiscono un gruppo di sostanze la cui origine e funzione, malgrado numerose ricerche eseguite in proposito, sono delle più incerte. Troppo lungo sarebbe accennare, anche sommariamente, a tutti gli studî fatti su tale argomento; d'altra parte, la copiosa letteratura è largamente citata in altri lavori (2). Ci limiteremo quindi a ricordare le opinioni prevalenti tra i fitofisiologi, sulle questioni delle quali tratta la nostra presente ricerca.

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di chimica agraria della R. Università di Bologna.
(2) Grünhut, Zeitschr. analyt. Chem., (1901), 542; Stoklasa, Zeitschr. Zuckerind, in Böhmen, 23, pp. 291 e 387 (1899), (Czapek, Biochemie der Pflanzen, 1, 538); Calabresi, Le staz. sper. agr. it., 39, 69 (1906).