

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Corpo sciolto: *o*-metilcicloesano =  $C_7H_{12}O = 112$ ; p. eb.  $162^{\circ} - 4$  a  $764\text{mm}$ .

Numero d'ordine	Concentr. in gr. per 100 gr.	Innalzamento termometrico $\Delta$	Peso molecolare ( $k=27.5$ )
52	1.713	0.32	146.9
53	4.069	0.72	155.4
54	6.418	1.12	157.6
55	8.860	1.55	157.2
56	10.580	1.86	155.8

Corpo sciolto: *bensile* =  $C_{11}H_{18}O_2 = 210$ ; p. f.  $90^{\circ}$ .

57	0.926	0.12	212.1
58	2.302	0.30	211.0
59	3.632	0.47	212.5
60	4.836	0.61	218.0

Fisica. — *Sulla emissione della fotosfera solare*. Nota del prof. ALESSANDRO AMERIO, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

1. Per calcolare la temperatura del sole, si applicano alla sua radiazione le leggi che valgono per il corpo nero.

Ma per la presenza dell'atmosfera solare si manifesta un assorbimento che varia dal centro alla periferia del disco; e per ciò la radiazione *totale* è la sovrapposizione di infinite altre tutte differenti e non può essere quella del corpo nero.

Wilson e Gray come pure Millochau cercano di determinare l'assorbimento dell'atmosfera solare per dedurre la radiazione complessiva della fotosfera e applicare la formula di Stefan-Boltzmann.

E qui si suppone che la fotosfera solare irradii come un corpo nero. Per questa ragione i risultati lasciano dei dubbi; ma d'altra parte se non si facesse questa ipotesi non si saprebbe veramente come procedere.

Ora si può dimostrare in modo abbastanza semplice e rigoroso che la fotosfera solare irradia come un corpo *nero* o *quasi nero*, secondo i casi; quindi i risultati ottenuti e quelli che si potranno ottenere applicando alla fotosfera solare *tutte* le leggi del corpo nero, acquistano quella sicurezza che ormai si può esigere in questo campo.

2. Sulla natura della fotosfera solare si possono fare queste ipotesi:

1°) che essa consista di densi strati gassosi;

2°) che provenga invece dalla condensazione di vapori metallici in goccioline che restano sospese nell'atmosfera.

Nella prima ipotesi basta supporre che gli strati che prendono parte alla radiazione non siano tanto profondi da presentare forti differenze di temperatura.

In tal caso un raggio incidente unità, alla profondità  $x$  sarà ridotto a  $e^{-kx}$ , se  $k$  è il coefficiente d'assorbimento, e siccome per ipotesi fatta  $k$  non è tanto piccolo, quest'espressione si ridurrà prontamente a zero, cioè la massa sarà perfettamente assorbente e, pel principio di Kirchoff, anche perfettamente irradiante.

Nella seconda ipotesi consideriamo la fotosfera solare come un sistema discreto di punti uniformemente distribuiti, che siano i centri di goccioline sferiche aventi il potere assorbente  $a$ , riflettente  $r$ .

Noto che  $a$  non dev'essere molto piccolo perchè in generale cresce colla temperatura, ciò che pei metalli è in accordo colla teoria elettromagnetica della luce.

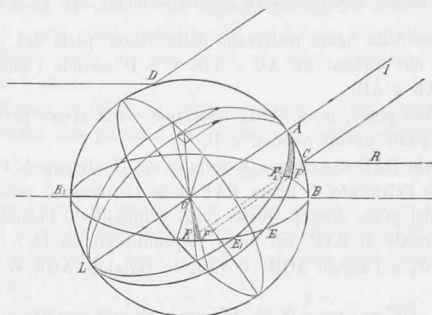


FIG. 1.

Anche la densa atmosfera che tiene le gocce in sospensione contribuirà colla sua emissione ad avvicinare la massa al corpo nero; ma, pel calcolo, ne trascurerò l'azione e considererò la fotosfera come se limitata da una parte da un piano che dirò *limite* e, negli altri sensi, indefinitamente estesa. Pel momento non terrò conto della diffrazione, nè della variazione di  $r$  coll'angolo d'incidenza.

Considero un fascio incidente unità, costituito dai raggi paralleli, normali al piano *limite* compresi nell'unità di sezione.

Penetrando nella massa questi raggi verranno in parte assorbiti, in parte riflessi. La prima frazione ci darà il potere assorbente  $A$ , mentre l'insieme dei raggi che viene respinto dalla massa ci darà il potere riflettente  $R$ .

3. Per procedere a questo calcolo occorre stabilire prima ciò che avviene di un fascio di raggi paralleli che investa esattamente una sfera riflettente.

Per ciò considero una sfera di centro  $O$ , raggio  $r$ : la sua intersezione con un piano diametrale parallelo al piano *limite* sia  $BEB_1$ ; sia  $IA$  il raggio centrale del fascio (fig. 1). Prendo per unità il fascio che colpisce

l'unità di superficie; sopra la calotta di centro A e angolo al centro  $2\alpha$  cadrà la quantità

$$i = \pi q^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$$

e sulla zona elementare compresa tra  $2\alpha$  e  $2(\alpha + d\alpha)$  cadrà

$$di = 2\pi q^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha d\alpha = \pi q^2 \operatorname{sen} 2\alpha d\alpha,$$

Si noti che  $2\alpha$  è precisamente l'angolo che il raggio riflesso fa coll'incidente; ne viene che l'energia riflessa nei vari angoli solidi cresce da  $\alpha = 0$  a  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , assume il massimo valore quando il raggio riflesso è normale al raggio incidente, e poi decresce simmetricamente fino ad  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Nel piano della figura resteranno dalla stessa parte del *piano limite* tutti i raggi che cadono tra AC e AD, C e D essendo i punti di mezzo degli archi AB e AB<sub>1</sub>.

In un altro piano, p. es. AEL, resteranno dalla stessa parte quelli che cadono fra i punti trovati come C e D.

Se l'angolo BAE che chiamo  $\beta$  varia di  $d\beta$ , F diventerà F<sub>1</sub>, e i raggi che colpiscono l'elemento di figura FAF<sub>1</sub> dopo la riflessione resteranno dalla stessa parte del *piano limite*. Questi raggi colpirebbero l'elemento F'OF'<sub>1</sub>, proiezione normale di FAF<sub>1</sub> sul piano perpendicolare ad IA.

Ora, se  $\vartheta_0$  è l'angolo AOB,  $\vartheta$  l'angolo variabile AOE si ha:

$$OF' = \rho \operatorname{sen} \frac{1}{2} \vartheta, \quad OF'_1 = \rho \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\vartheta + d\vartheta)$$

e l'area elementare F'OF'<sub>1</sub> sarà (essendo F'OF'<sub>1</sub> =  $d\beta$ )

$$\frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \vartheta d\beta.$$

Tutto è simmetrico rispetto al piano del disegno, quindi la proiezione dell'area colpita da raggi che restano dalla stessa parte del *piano limite* è

$$2 \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \rho^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \vartheta d\beta = \rho^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \vartheta d\beta.$$

Il triangolo rettangolo AEB dà

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_0}{\cos \beta}$$

da cui ricavo facilmente

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \vartheta = \frac{1 - \cos \beta}{2 \sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}}$$

e l'area cercata diventa

$$\frac{1}{2} e^2 \int_0^\pi \left( 1 - \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}} \right) d\beta = e^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta + \operatorname{tg}^2 \vartheta_0}} d\beta \right).$$

L'integrale che resta da calcolare è nullo perchè scindendolo in altri due tra 0 e  $\frac{\pi}{2}$  e tra  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$  si vede che ad ogni elemento del primo ne corrisponde uno eguale del secondo ma col segno cambiato per cui la somma è sempre nulla.

Ne segue che l'area cercata è  $\frac{1}{2} \pi e^2$  ossia è la metà della sezione del fascio che investe la sfera e non dipende dall'angolo che il fascio fa col piano limite; e così resta stabilito che, qualunque sia quest'angolo, una metà dell'energia resta da una parte del piano limite e l'altra metà passa dall'altra parte.

4. Se dunque un fascio di raggi, comunque diretti, investe una delle gocce del sistema una porzione proporzionale ad  $a$  viene assorbita, una proporzionale a  $\frac{1}{2} r$  viene riflessa verso l'interno e una eguale verso l'esterno.

Considero l'unità di sezione dello strato di gocce che si trovi alla distanza  $x$  dal piano limite e cerco l'espressione della quantità di energia  $\mathcal{G}(x)$  che l'attraversa in tutti i sensi, avendo preso come unità l'energia incidente al piano limite.

Perciò scindo  $\mathcal{G}(x)$  in tre parti che sono:

- $\mathcal{G}_1(x)$  porzione che ancora non è stata nè assorbita, nè riflessa;
- $\mathcal{G}_2(x)$  insieme dei raggi che dopo riflessione procedono verso l'interno;
- $\mathcal{G}_3(x)$  insieme dei raggi riflessi verso l'esterno.

Queste tre funzioni non dipendono che dalla  $x$ .

Sia ora  $n$  la somma delle sezioni massime delle gocce che si trovano nell'unità di volume,

Il valore di  $\mathcal{G}_1(x)$  alla profondità  $(x + dx)$  sarà

$$\mathcal{G}_1(x + dx) = \mathcal{G}_1(x) + \mathcal{G}'_1(x) dx.$$

D'altra parte attraversando  $dx$ ,  $\mathcal{G}_1$  diminuisce di  $\frac{a}{n} \mathcal{G}_1(x) dx$  assorbita,  $\frac{r}{2n} \mathcal{G}_1(x) dx$  riflessa in dentro,  $\frac{r}{2n} \mathcal{G}_1(x) dx$  riflessa in fuori, quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(x + dx) &= \mathcal{G}_1(x) - \frac{a}{n} \mathcal{G}_1(x) dx - \frac{1}{2} \frac{r}{n} \mathcal{G}_1(x) dx - \frac{1}{2} \frac{r}{n} \mathcal{G}_1(x) dx = \\ &= \mathcal{G}_1(x) - \frac{1}{n} \mathcal{G}_1(x) dx. \end{aligned}$$

Dunque

$$g_1'(x) = -\frac{1}{n} g_1(x)$$

ossia

$$g_1(x) = C_1 e^{-\frac{x}{n}}.$$

La condizione al limite  $g_1 = 1$  per  $x = 0$  dà  $C_1 = 1$  e quindi

$$(1) \quad g_1 = e^{-\frac{x}{n}}.$$

L'assorbimento di questa parte sarà:

$$(2) \quad \frac{a}{n} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{n}} dx = a.$$

Calcoliamo  $g_2$  e  $g_3$ .

Attraverso lo spessore  $dx$   $g_2$  diventerà

$$g_2(x+dx) = g_2(x) + g_2'(x) dx.$$

D'altra parte  $g_2$  aumenterà per riflessione di

$$\frac{1}{2} \frac{r}{n} g_1(x) dx + \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_3(x) dx$$

e diminuirà parte per assorbimento, parte per riflessione verso l'esterno di

$$\frac{a}{n} g_2(x) dx + \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_2(x) dx.$$

Si avrà dunque

$$(3) \quad g_2' = \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_1 + \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_3 - \frac{a}{n} g_2 - \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_2.$$

Analogamente, considerando il passaggio di  $g_3$  da  $x$  a  $x - dx$  risulta

$$(4) \quad g_3' = -\frac{1}{2} \frac{r}{n} g_1 - \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_2 + \frac{a}{n} g_3 + \frac{1}{2} \frac{r}{n} g_3;$$

e ponendo

$$(5) \quad \frac{1}{2} \frac{r}{n} = \alpha, \quad \frac{1}{2} \frac{r}{n} + \frac{a}{n} = \beta,$$

si avrà il sistema:

$$(6) \quad \begin{cases} g_2' = \alpha g_1 + \alpha g_3 - \beta g_2 \end{cases}$$

$$(7) \quad \begin{cases} g_3' = -\alpha g_1 - \alpha g_2 + \beta g_3. \end{cases}$$

Per risolverlo ricavo  $\varphi_3$  dalla (6), derivo e sostituisco nella (7); ricavo  $\varphi_2$  dalla (7) derivo e sostituisco nella (6). Tenuto conto della espressione (3) della  $\varphi_1$ , si ottiene

$$\begin{cases} \varphi_2'' + (\alpha^2 - \beta^2) \varphi_2 + \left( \alpha^2 + \alpha\beta + \frac{\alpha}{n} \right) e^{-\frac{\alpha}{n}x} = 0 \\ \varphi_3'' + (\alpha^2 - \beta^2) \varphi_3 + \left( \alpha^2 + \alpha\beta - \frac{\alpha}{n} \right) e^{-\frac{\alpha}{n}x} = 0; \end{cases}$$

e tenendo conto delle (5), per cui

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{a}{n^2} \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \frac{\alpha}{n} = \frac{r}{n^2} \\ \alpha^2 + \alpha\beta - \frac{\alpha}{n} = 0 \end{cases}$$

si avrà il sistema

$$(8) \quad \begin{cases} \varphi_2'' - \frac{a}{n^2} \varphi_2 + \frac{r}{n^2} e^{-\frac{\alpha}{n}x} = 0 \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi_3'' - \frac{a}{n^2} \varphi_3 = 0. \end{cases}$$

Per risolvere la (8) pongo

$$(10) \quad \varphi_2 = (y-1) e^{-\frac{\alpha}{n}x}$$

essa diventerà

$$(11) \quad y'' - \frac{2}{n}y' + \frac{r}{n^2}y = 0.$$

E questa ha per soluzione generale

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x},$$

essendo  $k_1$  e  $k_2$  le radici dell'equazione algebrica

$$k^2 - \frac{2}{n}k + \frac{r}{n^2} = 0,$$

cioè

$$k_1 = \frac{1}{n} + \sqrt{\frac{a}{n^2}}, \quad k_2 = \frac{1}{n} - \sqrt{\frac{a}{n^2}},$$

e quindi per la (10)

$$(12) \quad \varphi_2 = (y-1) e^{-\frac{\alpha}{n}x} = C_1 e^{\sqrt{\frac{a}{n^2}} \frac{\alpha}{n}} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{a}{n^2}} \frac{\alpha}{n}} - e^{-\frac{\alpha}{n}x}.$$

Le costanti  $C_1$  e  $C_2$  sono date dalle condizioni ai limiti. Per  $x = \infty$  si ha  $\varphi_2 = 0$ , dunque  $C_1 = 0$ ; per  $x = 0$  si ha  $\varphi_2 = 0$ ; dunque  $C_2 = 1$ .  
Ne risulta

$$(13) \quad \varphi_2 = e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}.$$

L'assorbimento di questa parte è

$$(14) \quad A_2 = \int_0^{\infty} \frac{a}{n} [e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}}] dx = \sqrt{a} - a.$$

Ed ora calcoliamo  $\varphi_3$ . La soluzione generale della (9) è

$$\varphi_3 = C_3 e^{k'x} + C_4 e^{k''x}$$

dove  $k'$  e  $k''$  sono le radici di

$$k^2 = \frac{a}{n^2}.$$

Dunque

$$\varphi_3 = C_3 e^{\sqrt{a} \frac{x}{n}} + C_4 e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}}. \quad (15)$$

Poichè per  $x = \infty$   $\varphi_3 = 0$  sarà  $C_3 = 0$  e quindi

$$(15) \quad \varphi_3 = C_4 e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}}.$$

Per trovare  $C_4$  osservo che  $\varphi_3(0)$  è quanto dell'energia unità incidente esce dalla massa, cioè

$$(16) \quad C_4 = \varphi_3(0) = R = 1 - a - A_2 - A_3,$$

dove  $A_3$  è la porzione assorbita di  $\varphi_3$ . Ora

$$A_3 = \int_0^{\infty} \frac{a}{n} C_4 e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}} dx = C_4 \sqrt{a},$$

e quindi sostituendo in (16) e risolvendo:

$$C_4 = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}.$$

Ne consegue

$$(17) \quad \varphi_3 = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} e^{-\sqrt{a} \frac{x}{n}}$$

$$(18) \quad A_3 = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} \sqrt{a}.$$



5. Riassumendo: In ogni punto della massa considerata, le quantità di energia propagantisi sono:

$$\begin{cases} (1) & \varphi_1 = e^{-\frac{x}{n}} \\ (13) & \varphi_2 = e^{-\sqrt{a}\frac{x}{n}} - e^{-\frac{x}{n}} \\ (17) & \varphi_3 = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}\frac{x}{n}} \end{cases}$$

e quindi si propaga verso l'interno

$$(19) \quad \varphi_1 + \varphi_2 = e^{-\sqrt{a}\frac{x}{n}},$$

mentre verso l'esterno si propaga la quantità:

$$(20) \quad \varphi_3 = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} e^{-\sqrt{a}\frac{x}{n}}.$$

Entrambe seguono la legge esponenziale mentre la (13) no, e presenta un massimo per una profondità

$$x = -\frac{n}{2} \frac{\log a}{1 - \sqrt{a}}$$

che cresce con  $n$ , cioè con la rarefazione della massa, e col diminuire di  $a$ .

L'assorbimento totale e il potere riflettente saranno:

$$(21) \quad A = a + A_2 + A_3 = 2 \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}} > a,$$

$$(22) \quad R = \frac{1 - \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a}}.$$

Il rapporto

$$(23) \quad \frac{A}{a} = \frac{2}{a + \sqrt{a}}$$

ci dice che l'efficacia della suddivisione della massa è tanto maggiore quanto  $a$  è più piccolo, per cui se nelle diverse parti dello spettro  $a$  presenta notevoli differenze,  $A$  le presenterà molto attenuate.

Le curve della fig. 2 fanno vedere come dipendano  $A$  e  $R$  da  $a$ . Si vede p. es. che, mentre  $a$  varia da 0,9 a 0,5,  $A$  varia da 0,974 a 0,829 e poichè non è probabile che  $a$  assuma valori piccoli possiamo ammettere che l'emissione e l'assorbimento siano *sensibilmente* eguali a quelli del corpo nero.

Non è forse inopportuno notare che vale anche la legge del coseno e che per conseguenza le variazioni d'intensità sul disco solare sono dovute esclusivamente all'assorbimento dell'atmosfera solare.

6. Ho già detto che la presenza dei gas intorno alle particelle deve avvicinare ancor più l'emissione a quella del corpo nero. Restano da vedere gli effetti della diffrazione e della variazione del potere riflettente coll'angolo d'incidenza.

Il primo effetto è simmetrico rispetto al piano diametrale della goccia perpendicolare al raggio incidente, presentando un minimo per questo piano. Ciò farà variare la distribuzione dell'energia intorno alla goccia, ma non impedirà che una metà si trovi da una parte del piano diametrale parallelo al piano limite, e l'altra metà dalla parte opposta. La sola azione che potrà

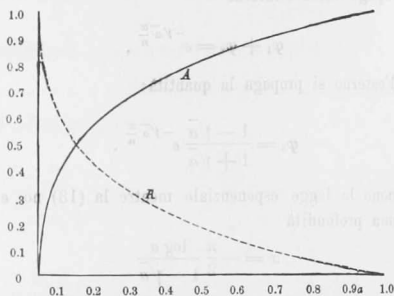


Fig. 2.

avere sul valore di  $A$  sarà dovuta al suo effetto combinato colla variazione del potere riflettente: essa sarà ad ogni modo trascurabile.

Resta a vedere l'effetto della variazione di  $r$ . Ciò farà variare i coefficienti delle equazioni (3) e (4) e i risultati saranno più complicati.

Ma si può vedere facilmente, e me lo conferma un calcolo fatto in un caso particolare, che le variazioni non saranno notevoli, perchè l'aumento di  $r$  coll'angolo d'incidenza, farà da una parte penetrare più profondamente nella massa l'energia, d'altra parte farà crescere la porzione di  $q_2$  che si riflette verso l'esterno, stabilendosi così un certo compenso.

In complesso dunque si può conchiudere che la fotosfera solare irradia come un corpo perfettamente o almeno approssimativamente nero.

E. M.