ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 17 ottobre 1909.

Fisica. — *Sul moto di un elettrone intorno ad un ione nel campo magnetico.* Nota dal Socio A. Righi.

1. In una precedente Nota avente questo stesso titolo e pubblicata or sono alcuni mesi [1], ho cercato di mostrare come il campo magnetico, rendendo minore la massima distanza alla quale può portarsi l'elettrone dal ione positivo intorno al quale si muove, valga a conferire qualche stabilità al sistema da essi costituito, ciò che è la premessa fondamentale della teoria da me proposta per render conto della natura dei così detti *raggi magnetici.* Ho cercato recentemente di acquistare delle più precise nozioni intorno alla traiettoria dell'elettrone, sempre in vista del medesimo scopo, e qui espongo sommariamente quanto ho potuto ricavare da questi nuovi tentativi, riservando ad altra pubblicazione una esposizione completa.

2. Dalle equazioni del moto:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{hx}{r^3} - k\frac{dy}{dt} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{hy}{r^3} + k\frac{dx}{dt}$$

nelle quali figura la quantità k, che è proporzionale all'intensità del campo magnetico, trassi con una prima integrazione le due seguenti:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{2} + \frac{a}{r^2} \quad , \quad \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2h}{r} - b - r^2\left(\frac{k}{2} + \frac{a}{r^2}\right)^2 ,$$

([1]) Rend. della R. Acc. dei Lincei, 21 dicembre 1908.

nelle quali entrano le coordinate polari θ, r in luogo delle cartesiane x, y; e cioè si ha $x = r\cos\theta$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, mentre a e b sono le costanti introdotte dall'integrazione, ed il cui valore è:

$$a = r_0 v_0 - \frac{k}{2} r_0^2 \,, \quad b = \frac{2h}{r_0} - u_0^2 - v_0^2 \,,$$

essendo r_0 il valore di r per l'istante $t = 0$, ed essendo u_0, v_0 le componenti secondo r_0 e perpendicolarmente ad r_0 della velocità dell'elettrone sempre per l'istante $t = 0$.

Nella citata Nota mi limitai ad un confronto fra la traiettoria effettivamente percorsa dall'elettrone, e la traiettoria che percorrerebbe senza campo magnetico, attribuendo nei due casi alle costanti a e b gli stessi valori, e ciò per rimanere indipendente dall'istante in cui il campo stesso entra in giuoco. Ora invece farò l'analogo confronto per uguali valori iniziali.

In altre parole supporrò, che il campo magnetico (sempre normale al piano in cui si trovano il ione positivo fisso e l'elettrone negativo mobile) venga improvvisamente creato, allorchè l'elettrone occupa una determinata posizione sull'orbita ellittica che esso, come un pianeta attorno al sole, descrive attorno al ione.

È evidente che, mentre è inutile sostituire nelle formole a b il suo valore scritto più sopra, è necessario invece fare simile sostituzione per la costante a, per la ragione che essa dipende da k. Scriveremo quindi:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{k}{2}\,\frac{r^2 - r_0^2}{r^2} + \frac{r_0 v_0}{r^2}\,, \\ \frac{dt}{dr} &= \pm \frac{r}{\sqrt{2hr - r_0^2 v_0^2 - br^2 - k r_0 v_0 (r^2 - r_0^2) - \frac{1}{4} k^2 (r^2 - r_0^2)^2}}\,, \end{aligned} \right.$$

come pure

$$(2)\quad \frac{d\theta}{dr} = \pm \frac{{}^1\!/_2\, k(r^2 - r_0^2) + r_0 u_0}{r\sqrt{\text{radicale precedente}}}\,.$$

Integrando quest'ultima si avrà l'equazione in coordinate polari della traiettoria.

3. Questa integrazione non presenta difficoltà se si ammette che il campo magnetico abbia piccola intensità. Ponendo, per brevità di scrittura:

$$(3)\qquad \mathrm{P}^2 = - r_0^2 v_0^2 + 2hr - br^2\,,$$

e trascurando nello sviluppo in serie le potenze di k superiori alla prima (ciò che richiede che sia $\mathrm{P} > 0$, il che non sarebbe se l'orbita originale fosse circolare), l'equazione da integrare diviene:

$$(4)\qquad \frac{d\theta}{dt} = \pm \left\{ \frac{r_0 v_0}{r\mathrm{P}} + \frac{k(r^2 - r_0^2)}{2r\mathrm{P}} + \frac{k r_0^2 v_0^2 (r^2 - r_0^2)}{2r\mathrm{P}^3} \right\}.$$

L'integrazione non presenta difficoltà essendo ben noto il valore di $\int \frac{r^m\,dr}{\mathrm{P}^{(n+\frac{1}{2})}}$, ove m ed n sono numeri interi.

Il risultato a cui si perviene è il seguente:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \theta = \pm \Big\{ &\text{arc sen}\,\frac{hr - r_0^2 v_0^2}{r\sqrt{h^2 - br_0^2 v_0^2}} + \frac{hk}{2b^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc sen}\,\frac{br - h}{\sqrt{h^2 - br_0^2 v_0^2}} \\ &- \frac{k\mathrm{P}}{2b} + \frac{kr_0^2 v_0^2 (hr - r_0^2 v_0^2) - kr_0^2 (bhr - 2h^2 + br_0^2 v_0^2)}{2(h^2 - br_0^2 v_0^2)\,\mathrm{P}} \Big\} + c, \end{aligned}$$

ove con c si è rappresentata la costante introdotta dalla integrazione.

Per mettere utilmente a confronto la traiettoria rappresentata da questa equazione, coll'orbita ellittica, che l'elettrone continuerebbe a percorrere se il campo magnetico non venisse creato, giova considerare da prima quest'ultima separatamente. La sua equazione si può desumere dalla (5) supponendovi $k = 0$, ed è perciò:

$$\theta = \pm\,\text{arc sen}\,\frac{hr - r_0^2 v_0^2}{r\sqrt{h^2 - br_0^2 v_0^2}} + c.$$

È facile riconoscere che, dicendo A il semiasse maggiore e B il minore, si ha $\mathrm{A} = \frac{h}{b}$, $\mathrm{B} = \frac{r_0 v_0}{\sqrt{b}}$. Infatti, per $k = 0$, la (4) dà $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r\mathrm{P}}{r_0 v_0}$, e perciò l'equazione $\mathrm{P} = 0$ fornirà i valori di r massimo e minimo. Si trova:

$$r_{mass.} = \frac{h + \sqrt{h^2 - br_0^2 v_0^2}}{b}, \qquad r_{min.} = \frac{h - \sqrt{h^2 - br_0^2 v_0^2}}{b};$$

e siccome nell'ellisse $r_{mass.} = \mathrm{A} + \sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}$, $r_{min.} = \mathrm{A} - \sqrt{\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2}$, si possono eguagliare le corrispondenti espressioni dei due r, con che si ricavano appunto i valori scritti di A e B.

Per acquistare una chiara idea delle due traiettorie, e cioè dell'ellisse e della traiettoria incognita, si potrebbe, come si usa in circostanze simili a questa, attribuire alle quantità che entrano nelle formole i loro valori numerici noti o verosimili. Così per h e k si assumerebbero certi valori, in base al valore supposto noto del campo magnetico ed ai valori presuntivi delle cariche $-e$ e $+e$ dell'elettrone e del ione, come pure in base alle presunte dimensioni atomiche e molecolari; e similmente per r_0 e v_0. Si arriverebbe così ad una determinazione in giusta scala delle due traiettorie.

Ma è evidente, che la scala alla quale le due curve sono rappresentate ha, nella questione attuale, poca importanza. Per tale motivo ho battuto una via diversa, col vantaggio di poter fare a meno d'ogni elucubrazione sui valori assoluti da attribuire alle varie quantità.

4. Si ponga nella (5) $h = Ab$, $r_0 v_0 = B\sqrt{b}$, $k = 2\alpha\sqrt{b}$, ove α è una nuova quantità proporzionale all'intensità del campo. Si ottiene:

$$\theta = \pm \left\{ \text{arc sen} \frac{Ar - B^2}{r\sqrt{A^2 - B^2}} + \alpha R \right\} + c, \tag{6}$$

posto per brevità:

$$R = \text{arc sen} \frac{r - A}{\sqrt{A^2 - B^2}} - \sqrt{-B^2 + 2Ar - r^2} + \\ + \frac{B^2(Ar - B^2) - r_0^2(Ar - 2A^2 + B^2)}{(A^2 - B^2)\sqrt{-B^2 + 2Ar - r^2}}.$$

Come si vede, basterà dare ad A e B valori determinati, e cioè scegliere una ellisse a piacere, poi attribuire ad α ogni valore desiderato, perchè si possano, mediante la (6), calcolare delle coppie di valori di θ ed r, e costruire così la traiettoria incognita punto per punto.

Occorre per altro determinare dapprima la costante c.

Se θ_0 ed r_0 sono i valori iniziali di θ ed r, quelli cioè relativi all'istante $t = 0$ in cui si crea il campo, la (6) diverrà:

$$\theta - \theta_0 = \pm \left\{ \text{arc sen} \frac{Ar - B^2}{r\sqrt{A^2 - B^2}} - \text{arc sen} \frac{Ar_0 - B^2}{r_0\sqrt{A^2 - B^2}} + \alpha(R - R_0) \right\},$$

essendo R_0 ciò che diviene R quando si muta r in r_0.

È necessario inoltre fissare l'origine degli angoli θ rispetto agli assi dell'ellisse. Mentre l'origine per le r è in uno dei fuochi, assumeremo come asse di partenza per la misura delle θ la retta che va da quel fuoco al punto più vicino dell'ellisse. Deve perciò aversi $r = A - \sqrt{A^2 - B^2}$ per $\theta = 0$, $\alpha = 0$, e la (6) diviene:

$$\theta = \mp \text{arc sen}(-1) \pm \left\{ \text{arc sen} \frac{Ar - B^2}{r\sqrt{A^2 - B^2}} + \alpha(R - R_0) \right\}.$$

In causa del doppio segno, non che della circostanza che esistono in generale due archi compresi fra 0° e 360° che hanno il medesimo seno, l'equazione dà naturalmente quattro valori di θ per ogni valore di r; ma stabilita la posizione dell'ellisse, si è in grado di scartare i due valori superflui, che condurrebbero ad una seconda curva simmetrica alla traiettoria cercata rispetto all'origine.

I valori utili sono quelli dati da:

$$\begin{aligned} \theta &= 90° + \left[\text{arc sen} \frac{Ar - B^2}{r\sqrt{A^2 - B^2}} + \alpha(R - R_0) \right], \\ \theta &= 270° - \left[\text{arc sen} \frac{Ar - B^2}{r\sqrt{A^2 - B^2}} + \alpha(R - R_0) \right]. \end{aligned} \tag{7}$$

Se non che resta ancora incerto, nella espressione di R, il valore da darsi all'arco il cui seno è $\frac{r - A}{\sqrt{A^2 - B^2}}$; ma si toglie tale incertezza colla considerazione della seconda delle equazioni (1), la quale integrata sempre per k piccolo, diviene:

$$\sqrt{b}\,.\,t = \pm \left\{ A(1 - 3\alpha B) \operatorname{arc\,sen} \frac{r - A}{\sqrt{A^2 - B^2}} + Q \right\} + c, \tag{8}$$

ove con Q si rappresenta per brevità una certa espressione contenente A, B, r, r_0 ed α, e con c la costante d'integrazione. Occorre infatti fare in modo che t risulti positivo e crescente in modo continuo.

Introducendo nelle (7) valori numerici scelti a piacere per A, B, r_0 ed α, ho potuto costruire in casi speciali, insieme all'ellisse di semiassi A e B, anche la traiettoria dell'elettrone quando è sotto l'azione del campo magnetico. Essa presenta una forma generalmente simile a quella della traiettoria della particella vibrante, con cui si rende conto del fenomeno di Zeeman.

5. Sempre colla restrizione che sia lecito trascurare le potenze di k superiori alla prima si dimostrano facilmente alcune altre proprietà della traiettoria.

a) Ponendo $\frac{dr}{dt} = 0$ restano determinati il valore massimo ed il valore minimo di r, e si trova:

$$r(1 + \alpha B) = A \pm \sqrt{A^2 - B^2 + \alpha B(r_0^2 - B^2 + \alpha B r_0^2)}\,.$$

È facile riconoscere che il massimo di r (segno superiore) è minore di $A + \sqrt{A^2 - B^2}$, cioè dal massimo di r per $\alpha = 0$, o tutt'al più gli è eguale in un caso particolare, e così pure che il minimo di r (segno inferiore) è minore di $A - \sqrt{A^2 - B^2}$, che è il minimo di r per $\alpha = 0$, o al più può essere eguale a tale valore. Questa proprietà insieme a quella accennata alla fine del precedente paragrafo, mette in evidenza il fatto essenziale, che l'elettrone per effetto del campo magnetico è meno facilmente esposto ad essere sottratto al dominio del ione positivo.

I due valori precedenti di r, cioè il suo massimo ed il suo minimo, riescono utili nella costruzione grafica della traiettoria, perchè nè essi nè i punti ad essi vicini sarebbero correttamente forniti dalle (7), non essendo lecito attribuire ad r in tali equazioni valori tali da rendere troppo prossimo a zero la quantità $-B^2 + 2Ar - r^2$.

b) Dicendo T il tempo impiegato dal raggio vettore che va all'elettrone mobile perchè, dopo aver fatto un intero giro riacquisti il valore iniziale, T_0 l'analogo nel caso di $\alpha = 0$, la (8) dà:

$$T = T_0(1 - 3\alpha B) = T_0\left(1 - \frac{3kr_0v_0}{2b}\right).$$

Se ne deduce che il campo accelera la rivoluzione dell'elettrone attorno al ione; e naturalmente la ritarderebbe qualora la direzione del campo, o il senso di rivoluzione dell'elettrone, fossero invertiti.

Matematica. — *Sull'integrazione per parti.* Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Corrispondente C. Arzelà.

Ci proponiamo, qui, di dare una formola d'integrazione per parti per le funzioni di due variabili. Dette $f(xy)$, $\varphi(xy)$ due funzioni date in un campo A, misurabile superficialmente, ed ivi superficialmente integrabili (nel senzo di Lebesgue); ed indicati con $F(xy)$, $\Phi(xy)$, i loro integrali indefiniti, dimostreremo che vale la formola

$$\int_A F(xy)\,\varphi(xy)\,dx\,dy = \int F(x,y)\left(\int \varphi(xy)\,dy\right)dx - \int \Phi(xy)\left(\int f(xy)\,dx\right)dy$$
$$+ \iint f(xy)\,\Phi(xy)\,dx\,dy$$
$$= \int F(xy)\left(\int \varphi(xy)\,dx\right)dy - \int \Phi(xy)\left(\int f(xy)\,dy\right)dx$$
$$+ \int_A f(xy)\,\Phi(xy)\,dx\,dy\,.$$

A tal uopo premetteremo due proporzioni ausiliari.

1. Senza ledere in alcun modo la generalità della questione che vogliamo trattare, possiamo supporre che il campo A, in cui si considerano date le funzioni, sia il rettangolo R determinato dalle rette $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = c$, $y = d$, $(c < d)$. Per ridurci ad un simile campo, basta in ogni caso scegliere a, b, c, d, in modo che R contenga A, e porre uguale a zero le funzioni date nei punti di R esterni ad A.

Ciò premesso, dimostriamo che *una funzione $f(xy)$ misurabile superficialmente in* R, *non negativa, e tale che esista*

$$\int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy\,,$$