ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

ziale, T_0 l'analogo nel caso di $\alpha = 0$, la (8) dà:

$$T = T_0(1 - 3\alpha B) = T_0\left(1 - \frac{3kr_0v_0}{2b}\right).$$

Se ne deduce che il campo accelera la rivoluzione dell'elettrone attorno al ione; e naturalmente la ritarderebbe qualora la direzione del campo, o il senso di rivoluzione dell'elettrone, fossero invertiti.

Matematica. — *Sull'integrazione per parti*. Nota di Leonida Tonelli, presentata dal Corrispondente C. Arzelà.

Ci proponiamo, qui, di dare una formola d'integrazione per parti per le funzioni di due variabili. Dette $f(xy)$, $\varphi(xy)$ due funzioni date in un campo A, misurabile superficialmente, ed ivi superficialmente integrabili (nel senzo di Lebesgue); ed indicati con $F(xy)$, $\Phi(xy)$, i loro integrali indefiniti, dimostreremo che vale la formola

$$\int_A F(xy)\,\varphi(xy)\,dx\,dy = \int F(x\,,y)\left(\int \varphi(xy)\,dy\right)dx - \int \Phi(xy)\left(\int f(xy)\,dx\right)dy + \iint f(xy)\,\Phi(xy)\,dx\,dy$$

$$= \int F(xy)\left(\int \varphi(xy)\,dx\right)dy - \int \Phi(xy)\left(\int f(xy)\,dy\right)dx + \int_A f(xy)\,\Phi(xy)\,dx\,dy\,.$$

A tal uopo premetteremo due proporzioni ausiliari.

1. Senza ledere in alcun modo la generalità della questione che vogliamo trattare, possiamo supporre che il campo A, in cui si considerano date le funzioni, sia il rettangolo R determinato dalle rette $x = a$, $x = b$, $(a < b)$, $y = c$, $y = d$, $(c < d)$. Per ridurci ad un simile campo, basta in ogni caso scegliere a, b, c, d, in modo che R contenga A, e porre uguale a zero le funzioni date nei punti di R esterni ad A.

Ciò premesso, dimostriamo che

una funzione $f(xy)$ misurabile superficialmente in R, *non negativa, e tale che esista*

$$\int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy\,,$$

è integrabile superficialmente in R. *Da ciò segue*

$$(1)\qquad \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy = \int_a^x\int_c^y f(xy)\,dx\,dy = \int_c^y dy \int_a^x f(xy)\,dx \ [1].$$

Consideriamo, a tale scopo, una successione

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

di numeri positivi, crescenti e tendenti all'infinito, ed indichiamo con $f_n(xy)$ la funzione che è uguale a $f(xy)$ in tutti i punti di R in cui è $f(xy) \leq l_n$, ed uguale a zero altrove. La $f_n(xy)$ risulta, così, limitata, misurabile ed integrabile in R, e non negativa. Inoltre, per definizione d'integrale, è

$$\lim_{n=\infty} \int_c^y f_n(xy)\,dy = \int_c^y f(xy)\,dy.$$

Siccome, poi, l'integrale $\int_c^y f_n(xy)\,dy$ è una funzione positiva, non decrescente al crescere di n, ed esiste, per ipotesi, l'integrale

$$\int_a^x dx \left(\lim_{n=\infty} \int_c^y f_n(xy)\,dy\right) = \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy,$$

esiste il limite

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy$$

ed è

$$(2)\qquad \lim_{n=\infty} \int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy = \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy.$$

Infatti, dall'essere sempre $f_n(xy) \leq l_n$, risulta [2] l'esistenza di

$$\int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy.$$

Dall'essere, poi, $f_n(xy) \leq f(xy)$, risulta

$$\int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy \leq \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy.$$

Poichè il primo membro di questa disuguaglianza non decresce al crescere di n, risulta che ne esiste il limite per $n = \infty$, e quindi — per un

[1] Con $\int_a^{x_1}\int_c^{y_1} f(xy)\,dx\,dy$, o $\int_c^{y_1}\int_a^{x_1} f(xy)\,dx\,dy$, indico l'integrale superficiale di $f(xy)$ esteso al rettangolo determinato dalle rette $x = a$, $x = x_1$, $y = c$, $y = y_1$.

[2] Vedi G. Fubini, *Sugli integrali multipli.* Rend. R. Acc. dei Lincei, 1907).

noto teorema di B. Levi [1] *sull'integrazione per serie* (applicato alla successione di funzione $\int_c^y f_1(xy)\,dy\,,\int_c^y f_2(xy)\,dy\ldots$) — che è vera la (2). Ma, essendo $f_n(xy)$ superficialmente integrabile, è [2]

$$\int_a^x \int_c^y f_n(xy)\,dx\,dy = \int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy\,,$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x \int_c^y f_n(xy)\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \int_a^x dx \int_c^y f_n(xy)\,dy = \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy\,.$$

Ciò vuol dire — per la definizione stessa d'integrale — che esiste l'integrale superficiale di $f(xy)$, e che è

$$\int_a^x \int_c^y f(xy)\,dx\,dy = \lim_{n=\infty} \int_a^x \int_c^y f_n(xy)\,dx\,dy = \int_a^x dx \int_c^y f(xy)\,dy\,.$$

Dalla proposizione del Fubini, già usata, risulta, allora, completamente dimostrata la (1).

Da quanto precede si deduce anche che *una funzione $f(xy)$ misurabile superficialmente, e tale che esista*

$$\int_a^x dx \int_c^y |f(xy)|\,dy\,,$$

è integrabile superficialmente, e per essa vale la (1).

2. Se $f(xy)$ è integrabile superficialmente, esiste [3] — eccettuato al più i valori di y di un insieme di misura nulla — l'integrale lineare $\int_a^x f(xy)\,dx$. Quest'integrale sarà una funzione superficialmente integrabile? Dimostreremo che sì, e precisamente che

se $f(xy)$ è una funzione integrabile superficialmente, la funzione uguale a $\int_a^x f(xy)\,dx$ nei punti ove quest'integrale lineare esiste, e nulla altrove, è superficialmente integrabile.

(1) Rendic. Istituto Lombardo, 1906.

(2) Fubini, loc. cit.

(3) Fubini, loc. cit.

Consideriamo, dapprima, il caso delle funzioni limitate ($|f(xy)| < M$). Ponendo

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(xy)\, dx\, dy$$

$$DF(x, y) = \lim_{u=+0} \frac{1}{u^2} \int_0^u \int_0^u f(x + u_1, y + u_2)\, du_1\, du_2 =$$

$$= \lim_{u=+0} \frac{F(x + u_1, y + u) - F(x + u, y) - F(x, y + u) + F(xy)}{u^2},$$

si ha (¹)

$$DF(x, y) = f(xy)$$

in tutti i punti di R, eccettuati al più quelli di un insieme di misura superficiale nulla. Ricordiamo, ora, che i punti di un insieme di misura superficiale nulla possono formare, sulle rette $y = \overline{y}$, insiemi di misura lineare non nulla solo per un gruppo di valori di $\overline{y}$ di misura (lineare) nulla. Da ciò segue che — eccettuati i valori di $\overline{y}$ di un insieme lineare J di misura nulla — sulla retta $y = \overline{y}$, $DF(x, y)$ e $f(x, y)$ differiscono solo nei punti di un insieme di misura lineare nulla; e quindi che su tale retta è

$$\int_a^x DF(x, y)\, dx = \int_a^x f(xy)\, dx .$$

Questi due integrali costituiscono due funzioni le quali differiscono, per quanto precede, solo dalle rette $y = \overline{y}$ dell'insieme J, vale a dire, solo nei punti di un insieme di misura superficiale nulla. Ne segue che, se la prima delle due funzioni dette è superficialmente misurabile, tale è anche la seconda.

Ora, dalla sua stessa definizione, $DF(x, y)$ risulta funzione limite di funzioni continue; ed avendosi

$$\left| \frac{F(x + u, y + u) - F(x + u, y) - F(x, y + u) + F(xy)}{u^2} \right|$$
$$= \left| \frac{1}{u^2} \int_0^u \int_0^u f(x + u_1, y + u_2)\, du_1\, du_2 \right|$$
$$\leq \frac{1}{u^2} \int_0^u \int_0^u |f(x + u_1, y + u_2)|\, du_1\, du_2 < M ,$$

per un noto teorema sull'integrazione per serie, si ha

$$\int_a^x DF(xy)\, dx = \lim_{u=+0} \frac{1}{u^2} \int_a^x \{ F(x + u, y + u) - F(x + u, y)$$
$$- F(x, y + u) + F(xy) \}\, dx .$$

(¹) G. Vitali, *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali*, Atti R. Accademia di Torino, 1907-08 (§ 4 e 5).

Dunque $\int_a^x \mathrm{DF}(xy)\,dx$, come funzione limite di funzioni continue (rispetto all'insieme delle variabili x, y), è misurabile superficialmente. Tale, perciò, è anche $\int_a^x f(xy)\,dx$, la quale funzione risulta così (essendo $|f| < \mathrm{M}$) superficialmente integrabile.

Passiamo, ora, al caso delle funzioni illimitate. Ponendo $f_1(xy) = f(xy)$ nei punti nei quali è $f(xy) \geq 0$, e $f_1(xy) = 0$ altrove; $f_2(xy) = -f(xy)$ nei punti nei quali è $f(xy) < 0$, e $f_2(xy) = 0$ altrove; si ha

$$f(xy) = f_1(xy) - f_2(xy),$$

con f_1, f_2, funzioni sempre maggiori o uguali a zero. Essendo poi integrabile $f(xy)$, lo sono anche f_1 e f_2. Per dimostrare il teorema basta, dunque, far vedere che esso è vero per una funzione $f(xy)$ *non negativa*.

Consideriamo una successione di numeri positivi, crescenti e tendente all'infinito:

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots;$$

ed indichiamo con $\varphi_n(xy)$ la funzione, positiva o nulla, che è uguale a $f(xy)$ nei punti ove è $f \leq l_n$, ed uguale a zero altrove. Dalla definizione stessa d'integrale, risulta

$$\lim_{u=\infty} \int_a^x \varphi_n(x, y)\,dx = \int_a^x f(xy)\,dx;$$

e la funzione $\int_a^x \varphi_n\,dx$, essendo limitata ($\varphi_n \leq l_n$), è, per il caso già studiato, misurabile superficialmente. La $\int_a^x f(xy)\,dx$, essendo così funzione limite di funzioni misurabili, è misurabile superficialmente.

Si ha, poi, essendo $\int_a^x \int_c^y f(xy)\,dx\,dy$ funzione continua, e quindi integrabile superficialmente e linearmente, ed in forza di una proposizione del Fubini già usata,

$$\int_a^x dx \int_a^x \int_c^y f(xy)\,dx\,dy = \int_a^x dx \int_c^y dy \int_a^x f(xy)\,dx.$$

Si può, perciò, applicare alla funzione $\int_a^x f(xy)\,dx$ il teorema del n. 1 e concludere che tale funzione è superficialmente integrabile.

La proposizione propostaci in principio di questo numero è, così, pienamente dimostrata.

Dalla dimostrazione precedente risulta anche che *se $f(xy)$ è una funzione misurabile superficialmente, e se esiste l'integrale lineare* $\int_a^x f(xy)\,dx$, *quest'integrale è una funzione superficialmente misurabile.*

3. Veniamo, finalmente, alla formola d'integrazione per parti annunciata. Siano le due funzioni $f(xy)$, $\varphi(xy)$ superficialmente integrabili. Conservando le notazioni del numero precedente, avremo

$$f(xy) = f_1(xy) - f_2(xy)$$
$$\varphi(xy) = \varphi_1(xy) - \varphi_2(xy),$$

dove $f_1, f_2, \varphi_1, \varphi_2$, sono funzioni non negative e integrabili. Ponendo

$$\mathrm{F}(xy) = \int_a^x \int_c^y f(xy)\,dx\,dy$$
$$\Phi(xy) = \int_a^x \int_c^y \varphi(xy)\,dx\,dy$$

avremo

$$\mathrm{F}(xy) = \int_c^x \int_c^y f_1(xy)\,dx\,dy - \int_a^x \int_c^y f_2(xy)\,dx\,dy = \mathrm{F}^{(1)}(x,y) - \mathrm{F}^{(2)}(x,y)$$

$$\Phi(xy) = \int_a^x \int_c^y \varphi_1(xy)\,dx\,dy - \int_a^x \int_c^y \varphi_2(xy)\,dx\,dy = \Phi^{(1)}(x,y) - \Phi^{(2)}(x,y).$$

Consideriamo, ora, l'integrale

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)}(xy)\,\varphi_1(xy)\,dx\,dy.$$

Per la proposizione del Fubini già ricordata, potremo scrivere

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)}\varphi_1\,dx\,dy = \int_a^x dx \int_c^y \mathrm{F}^{(1)}\varphi_1\,dy,$$

ed applicando l'integrazione per parti all'integrale lineare $\int_c^y \mathrm{F}^{(1)}\varphi_1\,dy$,

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)}\varphi_1\,dx\,dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(1)}\left(\int_c^y \varphi_1\,dy\right)dx$$
$$- \int_a^x dx \int_c^y \left(\int_c^y \varphi_1\,dy\right)\left(\int_a^x f_1\,dx\right)dy.$$

Le funzioni $\int_c^y \varphi_1\,dy$, $\int_a^x f_1\,dx$ sono, per il n. 2, superficialmente misurabili, tale, perciò, è anche il loro prodotto $\left(\int_c^y \varphi_1\,dy\right)\left(\int_a^x f_1\,dx\right)$, il quale è una funzione non negativa.

Per il n. 1, possiamo, perciò, scrivere

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)} \varphi_1 \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(1)} \left(\int_c^y \varphi_1 \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y dy \int_a^x \left(\int_c^y \varphi_1 \, dy \right) \left(\int_a^x f_1 \, dx \right) dx .$$

Con una nuova integrazione per parti, avremo

$$(3) \qquad \int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)} \varphi_1 \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(1)} \left(\int_c^y \varphi_1 \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y \Phi^{(1)} \left(\int_a^x f_1 \, dx \right) dy + \int_a^x \int_c^y \Phi^{(1)} f_1 \, dx \, dy .$$

Analogamente si ottiene

$$(4) \qquad \int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(1)} \varphi_2 \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(1)} \left(\int_c^y \varphi_2 \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y \Phi^{(2)} \left(\int_a^x f_1 \, dx \right) dy + \int_a^x \int_c^y \Phi^{(2)} f_1 \, dx \, dy$$

$$(5) \qquad \int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(2)} \varphi_1 \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(2)} \left(\int_c^y \varphi_1 \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y \Phi^{(1)} \left(\int_a^x f_2 \, dx \right) dy + \int_a^x \int_c^y \Phi^{(1)} f_2 \, dx \, dy$$

$$(6) \qquad \int_a^x \int_c^y \mathrm{F}^{(2)} \varphi_2 \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F}^{(2)} \left(\int_c^y \varphi_2 \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y \Phi^{(2)} \left(\int_a^x f_2 \, dx \right) dy + \int_a^x \int_c^y \Phi^{(2)} f_2 \, dx \, dy .$$

Sommando membro a membro le uguaglianze (3), (4), (5), (6), dopo aver moltiplicato la (4) e la (5) per -1, si ottiene, tenendo conto delle posizioni fatte,

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F} \varphi \, dx \, dy = \int_a^x \mathrm{F} \left(\int_c^y \varphi \, dy \right) dx$$

$$- \int_c^y \Phi \left(\int_a^x f \, dx \right) dy + \int_a^x \int_c^y \Phi f \, dx \, dy ,$$

che è appunto la formola che dovevamo dimostrare. In modo analogo si ottiene

$$\int_a^x \int_c^y \mathrm{F}\varphi\, dx\, dy = \int_c^y \mathrm{F}\left(\int_a^x \varphi\, dx\right) dy$$

$$- \int_a^x \Phi \left(\int_c^y f\, dy\right) dx + \int_a^x \int_c^y \Phi\, f\, dx\, dy\,.$$

Dal confronto delle due formole trovate si ha

$$\int_a^x \left\{ \mathrm{F} \int_c^y \varphi\, dy + \Phi \int_c^y f\, dy \right\} dx = \int_c^y \left\{ \mathrm{F} \int_a^x \varphi\, dx + \Phi \int_a^x f\, dx \right\} dy\,.$$

Chimica. — *Il cicloesano come solvente crioscopico* (¹). (*Comportamento del cicloesanone sciolto in cicloesano*). Nota di L. Mascarelli e I. Musatty, presentata dal Socio G. Ciamician.

Il cicloesanone sciolto in cicloesano presenta, rispetto agli altri chetoni, un contegno crioscopico particolare: per convincersene basta osservare la figura riguardante il comportamento crioscopico dei chetoni, riportata nella Nota precedente [2]; in quella la curva riferentesi al cicloesanone occupa una posizione tutta speciale. Questo chetone fa parte di quella serie di corpi, i quali, avendo costituzione chimica analoga al cicloesano, furono sciolti in esso per stabilire se avessero facoltà di cristallizzare insieme col solvente [3].

Già a concentrazioni assai piccole i valori del peso molecolare sono così elevati, rispetto a quelli degli altri chetoni, da lasciare supporre, che l'anomalia sia dovuta anche ad altre cause e non solo ad associazione.

Il metodo diretto di analisi della fase solida, che per prima si separa nel congelamento, metodo che, come è risaputo, fu proposto da von Bijlert, non potè nel nostro caso essere applicato, perchè nessuno dei processi di dosaggio dei chetoni si mostrò di facile applicazione al dosamento del cicloesanone, nè così sensibile da permettere conclusioni sicure al riguardo. Cercammo di applicare il metodo di Fischer e Meyer [4], di Zelinsky [5], di Stracke [6], di Petrenko-Kritschenko e Lordkipanidze [7], tentammo il dosa-

[1] Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna, luglio 1909.

[2] Rend. R. Acc. Lincei, *18*, II (1909).

[3] Mascarelli e Benati, Gazz. Ch. It., *37*, II, 527 (1907).

[4] Liebig's, An., *190*, 145 (1878); Jour. prak. Ch. (2), *36*, 115 (1887).

[5] Ber. d. d. Ch. Ges., *30*, 1541 (1897).

[6] Monatshefte für Chemie, *12*, 524 (1891); *13*, 299 (1892); *14*, 270 (1893).

[7] Ber. d. d. Ch. Ges., *34*, 1702 (1901).