ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Osservazione su di una proprietà degli integrali di una classe di equazioni differenziali.* Nota del Corrispondente E. PASCAL.

Le equazioni differenziali che qui vogliono considerarsi sono quelle del tipo

$$y' = P_n(y) \tag{1}$$

in cui y è la funzione incognita di x, e $P_n(y)$ rappresenta un polinomio di grado n in y, con coefficienti funzioni di x, e la proprietà di cui vogliamo trattare ha relazione con quella famosa, scoperta da Ed. Weyr e Picard, della costanza del rapporto anarmonico di quattro soluzioni particolari delle equazioni di Riccati, che rientrano appunto nel tipo (1) per $n = 2$. Le equazioni di questo tipo sono state ripetutamente studiate, ma con poco successo.

La proprietà surricordata corrisponde evidentemente a ciò: che le curve rappresentanti gli integrali particolari di un'equazione di Riccati segano su due qualunque rette perpendicolari all'asse delle x, due punteggiate proiettive, donde deriva poi che le corde di tutti gli archi di quelle curve, archi limitati sempre da due rette perpendicolari all'asse delle x, inviluppano una conica.

Facendo indefinitamente avvicinare fra loro le indicate due rette parallele, possiamo conchiudere che, considerando tutte le curve integrali di una equazione di Riccati, le tangenti ad esse nei punti di eguale ascissa, inviluppano una conica.

Ora vogliamo osservare che quest' ultima proprietà può estendersi alle curve integrali delle equazioni differenziali di tipo (1), e propriamente che *le tangenti alle curve integrali di* (1), *nei punti aventi la medesima ascissa, inviluppano una curva di ordine* n, *cioè di ordine eguale al grado del polinomio* P_n.

Ed infatti, osservando che l'equazione della tangente ad una curva integrale di (1) in un punto di ascissa x, è

$$Y - y - (X - x)\,P_n(y) = 0, \tag{2}$$

e che l'inviluppo di questa retta, considerandovi y come parametro variabile, e x fisso, è dato dal discriminante, eguagliato a zero, della precedente equazione (2) algebrica in y, indicando con $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$ i coefficienti del polinomio P_n, l'equazione dell'inviluppo sarà

$$\begin{vmatrix} (X-x)Q_0\,, & (X-x)Q_1\,, & (X-x)Q_2\,,\ldots \\ 0 & (X-x)Q_0\,, & (X-x)Q_1\,,\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ n(X-x)Q_0\,, & (n-1)(X-x)Q_1\,, & (n-2)(X-x)Q_2\,,\ldots \\ 0 & n(X-x)Q_0\,, & (n-1)(X-x)Q_1\,,\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Il determinante del primo membro è di ordine $2n-1$; soppresso il fattore comune $(X-x)$, che comparisce in ciascuna delle $n-1$ prime colonne, resta una equazione in X e Y di grado n; con che è provato l'assunto.

Matematica. — *L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine e per altre equazioni differenziali.* Nota del Corrispondente Ernesto Pascal.

È oramai ben conosciuto l'integrafo di Abdank-Abakanowicz, col quale si può costruire meccanicamente e con moto continuo la *curva integrale di una data*, cioè la curva le cui ordinate y rappresentano in ogni istante l'integrale definito, da una ascissa x fissa sino alla x del punto che consideriamo, di una funzione y di x che è rappresentata geometricamente da una curva assegnata.

Il principio cinematico che governa la costruzione dello strumento è fondato notoriamente sulla necessità che ha una rotella a piano verticale e premuta fortemente sul foglio orizzontale di disegno, di conservare inalterato il suo piano; se poi si fa, mediante un parallelogrammo articolato, che questo piano sia in ogni istante nella direzione della tangente alla curva integrale, e che la rotella sia unita ad un carrello mobile (la cui posizione rappresenti in ogni istante quella del punto della curva integrale) scorrevole su di una asta mobile ma che si conservi sempre perpendicolare all'asse delle x, per modo che il movimento della rotella nel suo piano porti con sè lo scorrimento del carrello sulla sua guida, si ha tutto quanto occorre per l'integrafo di Abakanowicz.

Ora questo principio è capace di un'applicazione assai più larga di quel che non ne sia stata fatta sinora; esso può servire all'integrazione, oltrechè delle funzioni, di equazioni differenziali di varie forme.

Lo scopo di questa comunicazione che ho oggi l'onore di fare all'Accademia, è di mostrare appunto l'applicazione di questa idea.