ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

polinomio P_n, l'equazione dell'inviluppo sarà

$$\begin{vmatrix} (X-x)Q_0, & (X-x)Q_1, & (X-x)Q_2, \ldots \\ 0 & (X-x)Q_0, & (X-x)Q_1, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n(X-x)Q_0, & (n-1)(X-x)Q_1, & (n-2)(X-x)Q_2, \ldots \\ 0 & n(X-x)Q_0, & (n-1)(X-x)Q_1, \ldots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Il determinante del primo membro è di ordine $2n-1$; soppresso il fattore comune $(X-x)$, che comparisce in ciascuna delle $n-1$ prime colonne, resta una equazione in X e Y di grado n; con che è provato l'assunto.

Matematica. — *L'integratore meccanico per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine e per altre equazioni differenziali.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

È oramai ben conosciuto l'integrafo di Abdank-Abakanowicz, col quale si può costruire meccanicamente e con moto continuo la *curva integrale di una data*, cioè la curva le cui ordinate y rappresentano in ogni istante l'integrale definito, da una ascissa x fissa sino alla x del punto che consideriamo, di una funzione y di x che è rappresentata geometricamente da una curva assegnata.

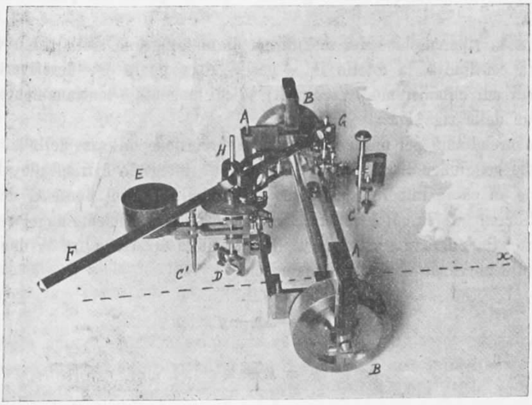
Il principio cinematico che governa la costruzione dello strumento è fondato notoriamente sulla necessità che ha una rotella a piano verticale e premuta fortemente sul foglio orizzontale di disegno, di conservare inalterato il suo piano; se poi si fa, mediante un parallelogrammo articolato, che questo piano sia in ogni istante nella direzione della tangente alla curva integrale, e che la rotella sia unita ad un carrello mobile (la cui posizione rappresenti in ogni istante quella del punto della curva integrale) scorrevole su di una asta mobile ma che si conservi sempre perpendicolare all'asse delle x, per modo che il movimento della rotella nel suo piano porti con sè lo scorrimento del carrello sulla sua guida, si ha tutto quanto occorre per l'integrafo di Abakanowicz.

Ora questo principio è capace di un'applicazione assai più larga di quel che non ne sia stata fatta sinora; esso può servire all'integrazione, oltrechè delle funzioni, di equazioni differenziali di varie forme.

Lo scopo di questa comunicazione che ho oggi l'onore di fare all'Accademia, è di mostrare appunto l'applicazione di questa idea.

Lo strumento che presento, costruito sulle mie indicazioni, da un'officina napoletana sotto la intelligente direzione di un ottimo mio coadiutore, il dott. Carmine Ajello, serve specialmente per le equazioni differenziali lineari di 1° ordine, ma, come dirò, può servire anche per altre equazioni più complicate; e mi sembra assai degno di nota il fatto, che la costruzione del mio strumento, che pur esegue un'operazione analitica, in un certo senso più complicata della sola quadratura, è più semplice di quella che si richiede per l'integrafo di Abakanowicz, che serve solo alle quadrature.

Fra le applicazioni del mio apparecchio sembreranno non prive di interesse quelle alla descrizione con moto continuo della curva logaritmica, della catenaria, e la risoluzione delle equazioni algebriche.



1. *Descrizione dello strumento.* — *Generalità.* — Un solido regolo rettangolare di acciaio e bronzo AA è scorrevole per mezzo di due robuste ruote B, B sul foglio orizzontale di disegno, da sinistra a destra e viceversa; l'asse delle x è quello descritto da un punto di questo regolo.

Sui due lati, perpendicolari all'asse delle x, di questo rettangolo scorrono due carrelli; quello a destra lo chiameremo *carrello differenziale*, e l'altro, a sinistra *carrello integrale.* Ai carrelli sono connesse rigidamente due punte C, C' che chiameremo rispettivamente *punta differenziale* e *punta integrale.*

Al carrello integrale è connessa una rotellina di acciaio temperato D, la quale poggia verticalmente sul foglio di disegno sul quale è fortemente premuta mediante un peso E; il piano della rotellina è tenuto, mediante un facile congegno, costantemente nella direzione di una riga di acciaio F, che congiunge il centro del carrello differenziale col centro del carrello integrale, in maniera, che spostandosi la direzione di questa riga, si sposta quella del piano della rotella D. Così p. es. facendo scorrere sulla sua guida il carrello differenziale, quello integrale resta fisso, ma gira intorno al suo punto di appoggio la rotella D.

Si faccia descrivere alla punta C una curva qualunque disegnata preventivamente sul foglio di disegno, curva di equazione $Q = Q(x)$, in cui Q rappresenti l'ordinata, e si disponga il carrello integrale in una qualunque posizione iniziale. Col muoversi di tutto l'apparecchio verso destra, la rotella D tenderà a rotare conservando il suo piano, e allora sposterà in su (o in giù secondo la sua posizione) il carrello integrale, e questo movimento farà mutare la direzione della riga F, e quindi quella del piano della rotella D.

Questa ripercussione dei movimenti di un congegno sull'altro avverandosi con continuità, la rotella D, e per essa la punta C', descriverà una curva (di cui chiameremo y l'ordinata), la cui tangente è continuamente nella direzione della riga F.

Se prendiamo per unità di misura la proiezione sull'asse delle x, della retta che congiunge il punto che sul carrello integrale corrisponde all'asse verticale su cui è imperniato il piano della rotella D, col punto G del carrello differenziale su cui è imperniata la riga F, il coefficiente angolare della tangente alla curva descritta da C' è dato dalla differenza fra le due ordinate delle curve di C e C'; abbiamo cioè

$$y' = Q - y,$$

ovvero

(1) $$y' + y = Q.$$

Questa è l'equazione differenziale che veniamo dunque a integrare col nostro strumento.

Ma non è la sola: faremo vedere più avanti che, con leggeri mutamenti nella disposizione della rotella D si possono ottenere gli integrali di equazioni differenziali anche più complicate.

L'equazione (1) può considerarsi come il tipo canonico dell'equazione lineare di 1° ordine, perchè, come si sa, la più generale equazione lineare di 1° ordine può sempre ridursi a quel tipo.

Passiamo ora a considerare le varie particolarità che può presentare la curva descritta da C' (*curva integrale*) in rapporto a quelle della curva descritta da C (*curva differenziale*).

Prima di tutto per le due curve gli assi delle x evidentemente coincidono, mentre l'asse delle y della prima curva dista da quello della seconda di una lunghezza uguale alla distanza fra le due punte C e C' quando la riga F è perpendicolare all'asse dello strumento, cioè parallela all'asse delle x.

La curva integrale ha un massimo o un minimo nei punti in cui le ordinate delle due curve nei punti corrispondenti sono eguali, purchè non coincidano le tangenti delle due curve, nel qual caso la curva integrale ha un flesso a tangente parallela all'asse delle x.

Più generalmente *la curva integrale avrà un flesso nei punti in cui la sua tangente è parallela a quella della curva differenziale nel punto corrispondente.*

Dal maneggio dello strumento tutte queste particolarità appaiono in maniera evidente.

Così anche facendo percorrere a C un arco di curva e indi facendo scorrere per un tratto il carrello G sulla sua guida, senza spostare l'apparecchio, e finalmente proseguendo colla punta C lungo un altro arco di curva, la rotella D cambia direzione, e descrive una curva che fa un angolo con quella descritta sino a quel momento; cioè se è discontinua l'ordinata della curva differenziale sarà discontinua la tangente alla curva integrale.

Se invece è discontinua la tangente alla curva differenziale, ma continua l'ordinata di questa, la direzione del piano della rotella D muta sempre con continuità, e cioè la tangente alla curva integrale resta continua; onde se colla punta C si descrive un arco sino ad un certo punto, e indi mutando bruscamente direzione si torna indietro con tutto l'apparecchio, la punta C' descriverà una curva con una *cuspide.*

Data una curva differenziale, se ne possono naturalmente costruire infinite curve integrali; la possibilità che c'è di collocare inizialmente il carrello integrale nella posizione che meglio ci piace della guida su cui esso scorre, corrisponde all'arbitrarietà della costante nell'integrale generale dell'equazione differenziale.

Collocando il carrello consecutivamente in varie posizioni iniziali, si possono avere varie curve integrali di una medesima curva differenziale descritta da C.

Ora deve avvenire, ed infatti se ne trova la conferma eseguendo accuratamente un disegno collo strumento, che *le corde degli archi di tutte queste curve integrali, archi limitati da due rette comunque scelte ma perpendicolari all'asse delle x, concorrono in uno stesso punto.*

Ciò dipende dalla proprietà elementare dell'equazione differenziale lineare di 1° ordine, che *fra tre suoi integrali particolari* y_1, y_2, y_3, *sussiste sempre la relazione* $\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \text{cost.}$, *cioè il rapporto delle differenze delle ordinate è indipendente dall'ascissa* x.

Giacchè se y_1, y_2 sono due integrali particolari dell'equazione, questa può sempre scriversi

$$\begin{vmatrix} y' & y & 1 \\ y'_1 & y_1 & 1 \\ y'_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;,$$

cioè:

$$\frac{d}{dx}\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = 0 \,.$$

Onde se y_3 è un nuovo integrale particolare, facendo $y = y_3$, si ha appunto la relazione di sopra.

2. *Curva integrale relativa ad una curva chiusa. Descrizione della curva logaritmica.* — La formola per l'integrale generale della equazione (1) è:

$$(2) \qquad \begin{aligned} y &= e^{-x}\left[\int Q e^{x} dx + C\right] \\ &= y_0 + e^{-x}\int_{x_0}^{x} Q e^{x} dx \,. \end{aligned}$$

Descrivendo più volte colla punta differenziale una curva chiusa, p. es. un cerchio, colla punta integrale si viene a descrivere una curva a *zig-zag* con tante cuspidi a destra e a sinistra, corrispondenti rispettivamente ai punti di contatto a destra e a sinistra delle tangenti alla curva chiusa perpendicolari all'asse delle x.

Conduciamo una retta perpendicolare all'asse delle x e che incontri i varî rami della curva integrale: *è costante la distanza fra i due punti nei quali tale retta incontra due rami consecutivi della curva*; e quindi in particolare *deve essere costante la distanza fra le cuspidi consecutive a destra, e costante quella fra le cuspidi consecutive a sinistra.*

Infatti sieno $P_1 P_2 P_3 \ldots$ i punti in cui la retta incontri i rami consecutivi della curva. Immaginiamo di cominciare a descrivere la curva partendo da P_1 la cui ascissa sia x_0. Dopo che colla punta differenziale avremo girato intorno alla curva, e saremo tornati al punto di partenza, colla punta integrale saremo giunti al punto P_2 di medesima ascissa x_0, e continuando il cammino colla punta differenziale sino a percorrere una seconda volta la curva, colla punta integrale si giungerà al punto P_3 sempre di ascissa x_0, e così di seguito.

Dalla formola (2) appare che la quantità di cui alla fine di ogni cammino si accresce l'ordinata della curva integrale è sempre

$$(3) \qquad e^{-x_0}\int_{x_0}^{x_0} Q e^{x} dx \,,$$

dove con $\int_{x_0}^{x_0}$ si intende naturalmente l'integrale ottenuto partendo da un punto di ascissa x_0 della curva Q, e tornando al medesimo punto *dopo aver girato attorno alla curva.* Ora alla fine di ogni cammino questa quantità (3) è sempre la stessa, e quindi appare la verità di quanto abbiamo asserito.

Qualunque sia x_0, l'integrale della formola (3) ha sempre il medesimo valore, perchè sempre gli stessi, solo disposti in ordine diverso, saranno gli elementi differenziali $Qe^x dx$ dei quali quell'integrale si compone; ma il fattore esterno e^{-x_0} è tanto maggiore quanto più è piccola l'ascissa x_0, cioè quanto più il punto iniziale è verso sinistra. Ciò significa che *le distanze costanti di cui si parla nell'enunciato della precedente proposizione, sono crescenti procedendo da destra verso sinistra.*

Si possono coll'apparecchio eseguire dei disegni e trovare infatti verificate tutte queste proprietà.

Poniamo nella formola (2) $Q = a =$ costante; risulta:

$$y = a + Ce^{-x}.$$

Si ha la curva esponenziale formata di un ramo che si avvicina assintoticamente alla retta $y = a$, e sta al disopra o al disotto di questa, secondo la posizione iniziale che abbiamo data al carrello integrale.

Trasportando l'asse delle x nella retta $y = a$ e l'asse delle y in quella retta perpendicolare a questa e che incontra la curva in un punto distante della quantità $+1$ o -1 dalla retta $y = a$, (secondochè la curva si estenda al disopra o al disotto della retta $y = a$) l'equazione della curva prende la forma ridotta

$$y = e^{-x},$$

ovvero

$$y = -e^{-x},$$

e col girare di 180° il foglio di disegno si hanno le equazioni

$$y = -e^x$$
$$y = e^x\ ,$$

mentre collo spostamento dell'asse delle y di una lunghezza eguale ad m si ha da quest'ultima equazione l'altra

$$y = e^m e^x = Me^x.$$

Fissando dunque con un'opportuna vite il carrello differenziale, e indi facendo scorrere lo strumento sulle sue ruote, la punta C′ descriverà una curva cui, con opportuni mutamenti di assi sul foglio di disegno, possiamo sempre immaginare corrispondere una delle precedenti equazioni. Ciò ci servirà in seguito.

Questa curva è *la logaritmica*; il nostro apparecchio può dunque servire in modo semplice come *compasso logaritmico*.

3. *Descrizione della catenaria.* — Disegnata sul foglio di disegno, mediante lo stesso strumento e nel modo detto nel n.° precedente, la curva $y = e^x$, si faccia percorrere tale curva alla punta differenziale. Come si vede dalla formola (2) ponendo $Q = e^x$, la curva integrale sarà quella di equazione

(4) $$y = \tfrac{1}{2} e^x + C e^{-x},$$

in cui C è una costante positiva o negativa, il cui valore dipende dal valore iniziale che si assume per y, cioè dalla posizione in cui si colloca inizialmente il carrello integrale. Poniamo che si incominci a descrivere colla punta differenziale la curva $Q = e^x$ dal punto di ordinata 1. Se in corrispondenza a tal punto si pone il carrello integrale in un punto di ordinata maggiore, eguale, o minore ad $\frac{1}{2}$, il valore della costante C riuscirà positivo, zero o negativo.

Se C è positivo, l'equazione (4) rappresenta sempre una *catenaria*; infatti trasportando l'origine delle coordinate sull'asse delle x della quantità

$$m = \tfrac{1}{2} \log 2C,$$

cioè ponendo $x = x' + m$, l'equazione (4) diventa

(5) $$y = \tfrac{1}{2} e^m (e^x + e^{-x})$$

che è la catenaria di parametro $e^m = \sqrt{2C}$.

Se la posizione iniziale della punta integrale ha per ordinata 1, si ha $C = \frac{1}{2}$ e la curva

(6) $$y = \cosh x.$$

Se invece ha per ordinata $\frac{1}{2}$ la posizione iniziale della punta integrale, si ha $C = 0$, e la curva

$$y = \tfrac{1}{2} e^x \quad ,$$

cioè la curva integrale è la stessa curva esponenziale donde prendiamo le mosse, solo spostata di una certa quantità verso sinistra.

Se infine la posizione iniziale della punta integrale ha ordinata minore di $\frac{1}{2}$, si ha C negativo, e una curva la cui equazione può, come quella di sopra, ridursi alla forma

(7) $$y = \tfrac{1}{2} e^m (e^x - e^{-x})$$

che diventa semplicemente

(8) $$y = \operatorname{senh} x$$

quando la predetta posizione iniziale è sull'asse delle x.

Si hanno curve che hanno tutte un flesso nel punto in cui incontrano l'asse delle x.

Il nostro strumento può dunque servire a descrivere con moto continuo la *catenaria*, e le curve che rappresentano l'andamento delle funzioni *seno e coseno iperbolici*.

4. *Risoluzione delle equazioni algebriche.* — Descritta collo stesso strumento e nel modo indicato nel n.° 2 la curva di equazione $y = e^{-x}$, si integri collo strumento questa curva.

Ponendo in (2), $Q = e^{-x}$, si trova

$$y = (x + C)e^{-x}. \tag{9}$$

Integrando nuovamente col medesimo strumento la curva rappresentata da questa equazione, si trova la curva

$$y = (\tfrac{1}{2}x^2 + Cx + C')e^{-x}; \tag{10}$$

e così seguitando, colla successiva integrazione delle curve volta per volta ottenute, si ha una curva la cui ordinata è rappresentata dal prodotto di un polinomio, di un certo grado, per l'esponenziale e^{-x}. I punti nei quali queste curve tagliano l'asse delle x corrispondono evidentemente alle radici reali del polinomio, giacchè l'altro fattore esponenziale non si annulla per nessuna x finita. Si ha così il mezzo di costruire graficamente le radici reali di qualunque equazione algebrica.

Giacchè sia assegnata un'equazione, che per fissare le idee supporremo di 3° grado e sotto la forma

$$\tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Le successive derivate sono

$$\tfrac{1}{2}x^2 + Mx + N$$
$$x + M.$$

Integriamo prima la curva $y = e^{-x}$ stabilendo le condizioni iniziali in maniera che mentre la punta differenziale poggi sul punto di ordinata 1 (e quindi di ascissa zero), la punta integrale poggi sul punto di ordinata M; indi integriamo la curva così ottenuta colle condizioni iniziali: punta differenziale sul punto di ordinata M, e punta integrale sul punto di ordinata N; infine integriamo ancora la curva ottenuta collocando inizialmente la punta differenziale nel punto di ordinata N e la punta integrale in quello di ordinata P; abbiamo così infine una curva che nelle sue intersezioni coll'asse delle x, dà le radici reali dell'equazione data.

5. *Altre equazioni differenziali che possono integrarsi collo stesso strumento.* — Nello strumento quale lo abbiamo finora adoperato, il piano verticale della rotella D contiene la riga F. Ma sullo strumento da me fatto

costruire esiste un facile congegno, mediante il quale la rotella, pur conservando il suo centro sul piano verticale passante per F, può fissarsi inclinato col suo piano, di un angolo costante α al detto piano verticale, angolo misurabile su di un quadrante graduato fissato al perno verticale H.

Osservando che allora la differenza delle ordinate Q, y dei punti corrispondenti delle due curve, la differenziale e l'integrale, è la tangente trigonometrica di un angolo che è la somma (o la differenza) dell'angolo α e dell'angolo θ che la rotella fa coll'asse delle x, e ponendo

$$\operatorname{tg}\alpha = m \quad , \quad \operatorname{tg}\theta = y' \quad ,$$

si riconosce che l'equazione differenziale che si viene a integrare è in tal caso della forma

$$(11) \qquad y = \frac{m + y'}{my' - 1} + \mathrm{Q} \; , \qquad (m = \text{cost.})$$

che si riduce alla lineare (1) per $m = 0$.

Ma per tali altre equazioni più complicate, e per le applicazioni che vi si potranno riferire, sarà forse necessaria una trattazione speciale.

Chimica. — *Presenza dell'uranio in rocce italiane.* Nota del Socio R. Nasini e di F. Ageno.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Chimica. — *Derivati maleinici e fumarici di p-amminofenoli* (1). Nota del Corrispondente Arnaldo Piutti.

Parte sperimentale (2).

A) Acidi ammici.

a) Acido p-ossifenilmaleinammico

$$\begin{array}{l} \quad\;\;\mathrm{OH} \\ \quad\;\;\; | \\ \mathrm{HC{-}C{=}N\,.\,C^6H^4\,.\,OH} \\ \;\| \\ \mathrm{HC{-}C{=}O} \\ \quad\;\;\; | \\ \quad\;\;\mathrm{OH} \end{array}$$

Preparazione. — Mescolando, anche all'oscuro, soluzioni acetoniche di p-amminofenolo, ottenuto scomponendo il suo cloridrato coi carbonati o coi

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto chimico-farmaceutico della R. Università di Napoli.

(2) La parte generale venne già pubblicata nel vol. XVII dei Rendiconti, pag. 635, Serie V.