ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Meccanica. — *Sulla forma più generale delle equazioni della dinamica.* Nota del prof. P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Riprendo le notazioni e le formule della mia Nota precedente, onde completare la trattazione del problema che mi era proposto.

Le (12′) sono risolute rispetto alle derivate; si può con una semplice e nota trasformazione risolvere rispetto alle derivate anche le (12). Invero, poniamo

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_r} = p_r \quad \text{e} \quad \mathrm{W} = \sum_r p_r u_r - \mathrm{T} \qquad (r = k+1, \ldots, 3n).$$

Si ha evidentemente

$$\begin{aligned} \delta \mathrm{W} &= \sum_r p_r\, \delta u_r + \sum_r u_r\, \delta p_r - \sum_r \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_r}\, \delta u_r - \\ &\qquad - \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}\, \delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_i}\, \delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_i}\, \delta z_i \right) \\ &= \sum_r u_r\, \delta p_r - \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i}\, \delta x_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y_i}\, \delta y_i + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z_i}\, \delta z_i \right). \end{aligned}$$

D'altra parte, pensando W espressa per le x, y, z e p, si trae

$$\delta \mathrm{W} = \sum_r \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_r}\, \delta p_r + \sum_i \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_i}\, \delta x_i + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_i}\, \delta y_i + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z_i}\, \delta z_i \right);$$

che paragonata colla precedente dà

$$u_r = \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_r} \quad , \quad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_i} = - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_i} \quad \text{e analoghe;}$$

talchè risulta ancora

$$\mathrm{P}_r = - \sum_r \left(\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x_i}\, \alpha_{ri} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial y_i}\, \beta_{ri} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z_i}\, \gamma_{ri} \right) = - \mathrm{W}_r .$$

Dopo ciò il sistema (12) (12′) diventa

$$\text{(13)} \qquad \frac{dp_r}{dt} + \mathrm{W}_r = \mathrm{U}_r - \sum_s p_s \sum_l \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_l} \sum_j (\alpha_{lj}\, \mathrm{E}^r_{sj} + \beta_{lj}\, \mathrm{F}^r_{sj} + \gamma_{lj}\, \mathrm{G}^r_{sj})$$

$$\text{(13′)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_s \alpha_{si} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_s}\,, \quad \frac{dy_i}{dt} = \sum_s \beta_{si} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_s}\,, \quad \frac{dz_i}{dt} = \sum_s \gamma_{si} \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial p_s}\,;$$

che ha la forma cercata.

Quando i vincoli, pur non dipendendo dal tempo, non sono olonomi, quali modificazioni subiscono l'equazioni trovate? In tal caso le (3) sono sostituite da equazioni del tipo

$$\text{(14)} \qquad \sum_i (a_{hi}\, x'_i + b_{hi}\, y'_i + c_{hi}\, z'_i) = \xi_h = 0 \qquad (h = 1\,, 2\,, \ldots, k)\,;$$

e allora

$$-\mathrm{N}_r + \mathfrak{T}_r = \sum_h \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_h} \sum_l u_l \sum_j (\alpha_{lj}\, \mathrm{E}^r_{hj} + \beta_{lj}\, \mathrm{F}^r_{hj} + \mathrm{G}^r_{hj})$$

non è più nulla, non essendo a_{hi}, b_{hi}, c_{hi} le derivate parziali d'una stessa funzione L_h. Per conseguenza nel 2° membro della (12) comparirà anche questa somma oltre quella già esistente (¹). Ma l'analogia di queste due somme permette di pensarle compendiate in una sola (quella già scritta in (12)); *onde si può dire che le* (12) *valgono in ogni caso*, salvo a dar loro la giusta interpretazione. E l'interpretazione è questa: Supponendo, per stare nel caso più generale, che vi siano alcuni vincoli olonomi e altri non olonomi, vi saranno k equazioni del tipo (3) (per esempio le prime k), k_1 equazioni del tipo (14) (le successive da $k+1$ a k_1), e le rimanenti (da k_1+1 a $3n$) equazioni di trasformazione del tipo (3′). Allora nelle (12) l'indice s va esteso prima da $3n$ a k_1+1 (diminuendolo), poi da k_1 a $k+1$ mutando $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u_s}$ in $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_s}$; la rimanente somma da k a 1 essendo identicamente nulla. Il sistema (12) (12′) risulta così formato di $6n - k_1$ equazione del prim'ordine con altrettante incognite (²).

Lo stesso dicasi, *mutatis mutandis*, pel sistema (13) (13′).

I sistemi (12) (12′) o (13) (13′) contengono come caso particolare le ordinarie equazioni di Lagrange o di Hamilton, quelle di Boltzmann (dette

(¹) È evidente che la somma contenente i moltiplicatori relativi ai vincoli non olonomi svanisce in virtù della (5) per $r = h$.

(²) È da notare che in $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi_s}$ compariscono la sole u, essendo nulle le ξ.

equazioni con le quasi-coordinate) e di altri. Per esempio, se $u_r = \frac{dq_r}{dt}$ $(r = k+1 \ldots 3n)$ essendo le q funzioni delle x, y, z, le (3′) equivalgono a equazioni finite del tipo

$$F_r(x_1\, y_1\, z_1 \ldots x_n\, y_n\, z_n) = q_r\,;$$

e allora la somma che comparisce nei secondi membri delle (12) è nulla identicamente. Inoltre da queste e dalle (1) ricavando le x, y, z in funzione della q, si possono eliminare le x, y, z dalle (12). La P_r diventa uguale a $\frac{\partial T}{\partial q_r}$ e le (12′) risultano identicamente soddisfatte; talchè il sistema (12) (12′) del 1° ordine si riduce alle $3n - k$ equazioni del secondo ordine nelle q

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = U_r\,.$$

È il modo più naturale di dedurre l'equazioni Lagrangiane, quando si voglia far vedere ch'esse valgono solo pei sistemi olonomi e per una speciale scelta di variabili.

Se solamente m delle (3′) equivalgono a equazioni del tipo (15), s'introdurranno le m variabili q in luogo di m coordinate cartesiane, e allora le (12) (12′) diventano un sistema misto di equazioni del primo e secondo ordine.

Abbiamo supposto finora i vincoli e i coefficienti delle (3′) indipendenti dal tempo. Nel caso opposto le (4) vanno sostituite dalle seguenti:

$$x'_i = a_i + \sum_s \alpha_{si}\, u_s \;,\quad y'_i = b_i + \sum \beta_{si}\, u_s \;,\quad z'_i = c_i + \sum_s \gamma_{si}\, u_s\,,$$

ove i coefficienti contengono esplicitamente il tempo. E allora è facile vedere, seguendo i ragionamenti fatti, che nei secondi membri delle (12) compariranno col segno di sottrazione anche le due somme

$$\sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_j (a_j\, E^r_{sj} + b_j\, P^r_{sj} + c_j\, G^r_{sj})\,,$$

$$\sum_s \frac{\partial T}{\partial u_s} \sum_j \left(\alpha_{ri} \frac{\partial a_{sj}}{\partial t} + \beta_{rj} \frac{\partial b_{sj}}{\partial t} + \gamma_{rj} \frac{\partial c_{sj}}{\partial t} \right);$$

la quale, nel caso dei sistemi non olonomi, vanno interpretate nel modo già indicato per l'altra somma contenuta nella (12).