ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Matematica. — *Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier*. Nota del dott. L. ORLANDO, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

La formula integrale di Fourier, cioè la seguente formula

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) \cos \alpha(\lambda - x)\, d\lambda\,, \tag{1}$$

è verificata quando $\psi(x)$ è una di quelle funzioni che si sogliono chiamare arbitrarie, perchè vincolate da condizioni poco restrittive.

Recentemente l'autorità del Pringsheim [1] ha richiamato l'attenzione degli studiosi sulle condizioni relative al modo di comportarsi di $\psi(x)$ per $x = \pm\infty$. Nel Riemann-Weber [2] figuravano le seguenti condizioni:

1) $\psi(x)$ ha in ogni finito intervallo un numero finito di massimi e di minimi (o anche non ne ha affatto);

2) l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(x)}{x}\, dx$ è convergente in modo assoluto.

Queste, che possiamo chiamare *condizioni all'infinito*, erano, con altre *condizioni al finito*, enunciate ivi come sufficienti perchè la formula (1) fosse valida.

La condizione 1) dice che se h è un arbitrario numero fisso, e se ξ è un numero che riguarderemo variabile, allora nell'intervallo $(\xi\,, \xi + h)$ è sempre contenuto un numero finito di massimi e di minimi, o anche nessuno. Essa non dice se, col tendere di ξ all'infinito, questo numero finito di massimi e di minimi (variabile con ξ) rimanga in limiti fissi o possa esorbitare da ogni limite.

Comunque sia, il Pringsheim infirma la dimostrazione del Riemann-Weber, facendo notare che essa si fonda sopra un equivoco.

Sulla scorta di questa critica e delle nuove idee ivi contenute, io dimostrai [3] che la (1) è valida quando valga la seguente condizione:

A) $\psi(x)$ tende a zero *in modo monotòno* per $x = \pm\infty$.

[1] V. la Nota *Ueber das Fouriersche Integraltheorem*. Jahresbericht der deutschen Math-Vereinigung, 1907.

[2] Partiellen Differentialgleichungen... ecc., vol. I.

[3] *Sulla formula integrale di Fourier*. Questi Rendiconti, ottobre 1908.

La sig.[na] G. Graziani [1] osserva che tale condizione si può estendere, che cioè la formula (1) è anche valida quando $\psi(x)$ è la somma di funzioni che verificano individualmente la A), e di un'altra funzione $R(x)$ che renda convergente in modo assoluto l'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, dx$.

Supponiamo ora di considerare la funzione $\psi(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ per ogni x positivo, e poi $= 0$ per ogni x negativo e per $x = 0$. Potrà questa funzione essere rappresentata coll'integrale di Fourier? A questa domanda risponderebbero affermativamente le condizioni 1) e 2), se ne fosse dimostrata la sufficienza. Ma, avendo avuto occasione di dover dare una risposta sicura, pensai di ricorrere al calcolo diretto dell'integrale doppio

$$\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\sin \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cos \alpha(\lambda - x)\, d\lambda. \tag{2}$$

Sebbene la condizione che figurerà in fine del presente lavoro renda inutile questo sviluppo, credo tuttavia che non sarà male farne conoscere i particolari.

Vale intanto la formula

$$\sin\lambda \cos\alpha(\lambda - x) = \frac{\sin[(1+\alpha)\lambda - \alpha x] + \sin[(1-\alpha)\lambda + \alpha x]}{2}$$

$$= \frac{\sin(1+\alpha)\lambda\cos\alpha x - \cos(1+\alpha)\lambda\sin\alpha x +}{2}$$

$$\frac{+\sin(1-\alpha)\lambda\cos\alpha x + \cos(1-\alpha)\lambda\sin\alpha x}{2}.$$

Dopo ciò, si ottiene per l'integrando (2) il valore

$$d\alpha\left(\cos\alpha x\int_0^\infty \frac{\sin(1+\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda - \sin\alpha x\int_0^\infty \frac{\cos(1+\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda\right.$$

$$\left. + \cos\alpha x\int_0^\infty \frac{\sin(1-\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda + \sin\alpha x\int_0^\infty \frac{\cos(1-\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda\right),$$

che terremo in questa forma per $\alpha < 1$, e scriveremo, invece, per $\alpha > 1$, in quest'altra:

$$d\alpha\left(\cos\alpha x\int_0^\infty \frac{\sin(1+\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda - \sin\alpha x\int_0^\infty \frac{\cos(1+\alpha)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda\right.$$

$$\left. - \cos\alpha x\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha-1)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda + \sin\alpha x\int_0^\infty \frac{\cos(\alpha-1)\lambda}{2\sqrt{\lambda}}\, d\lambda\right).$$

Per $\alpha = 1$, è evidentemente inutile scegliere fra una forma e l'altra.

[1] *Sulla formula integrale di Fourier.* Questi Rendiconti, settembre 1909.

Valendoci ora delle formule

$$(3)\qquad \int_0^\infty \sin k^2 z^2\, dz = \int_0^\infty \cos k^2 z^2\, dz = \frac{1}{2k}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ben note (¹), ed operando la sostituzione $\lambda = z^2$, noi troviamo, senza fare evidentemente nessuna eccezione per $\alpha = 1$, che l'integrale (2) ha il valore

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{1+\alpha}}\, d\alpha - \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{1+\alpha}} + \int_0^1 \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{1-\alpha}}\, d\alpha \right.$$
$$\left. + \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{1-\alpha}}\, d\alpha - \int_1^\infty \frac{\cos \alpha x}{\sqrt{\alpha - 1}}\, d\alpha + \int_1^\infty \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-1}}\, d\alpha\right).$$

Operiamo ora nei primi due di questi integrali la sostituzione $\beta = 1 + \alpha$, nei due successivi la sostituzione $\beta = 1 - \alpha$, e negli ultimi due la sostituzione $\beta = \alpha - 1$. Allora ci ridurremo alla seguente espressione:

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^\infty \frac{\cos(\beta-1)\,x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta - \int_0^\infty \frac{\sin(\beta-1)\,x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta \right.$$
$$\left. - \int_0^\infty \frac{\cos(\beta+1)\,x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta + \int_0^\infty \frac{\sin(\beta+1)\,x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta\right),$$

la quale, se sviluppiamo i numeratori, diventa

$$2\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sin x\left(\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta + \int_0^\infty \frac{\cos \beta x}{2\sqrt{\beta}}\, d\beta\right).$$

La solita sostituzione, cioè $\beta = z^2$, ci fa trovare per le formule (3), l'espressione $\dfrac{\pi \sin x}{\sqrt{x}}$, uguale dunque all'integrale (2) per ogni x positivo; perciò per i valori positivi di x si potrà scrivere

$$(4)\qquad \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\sin \lambda}{\sqrt{\lambda}} \cos \alpha(\lambda - x)\, d\lambda\,.$$

Questa formula mostra che alla funzione $= \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ per $x > 0$, ed $= 0$ per $x \leqq 0$, il teorema contenuto nella formula (1) è applicabile.

Ma il calcolo diretto, che abbiamo qui svolto per valutare l'integrale (2), per quanto facile, non lascia di essere fastidioso, e la (4) mostra che la condizione A) ed anche le condizioni della sig.$^{\text{na}}$ Graziani sono ben lontane dall'essere necessarie.

(¹) V. per esempio il citato libro di Riemann-Weber, vol. I, § 61, in fine.

Io darò una nuova condizione, che pur non essendo ancora tanto più generale delle precedenti da arrecare decisamente nuova luce sull' importante soggetto, estende tuttavia molto il campo delle funzioni alle quali si può applicare la formula (1).

Supponendo che $\varphi(x)$ sia una funzione tale da verificare la condizione A), consideriamo la funzione

$$\psi(x) = \varphi(x) \cos \varrho x, \tag{5}$$

dove ϱ denota un parametro arbitrario. Richiamiamo (per esempio dal Riemann-Weber) che la (1) è verificata quando valga la formula preliminare

$$\int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0 \qquad (c > 0), \tag{6}$$

e l'altra analoga fino a $-\infty$.

Nel caso di ψ data da (5), il primo membro della (6) diventa

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda \\ &\qquad = \int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \varphi(\lambda) \frac{\cos(\alpha+\varrho)\lambda + \cos(\alpha-\varrho)\lambda}{2} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos(\alpha+\varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{1}{2}\int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos(\alpha-\varrho)\lambda \, d\lambda. \end{aligned} \tag{7}$$

Se ora operiamo in questi integrali rispettivamente le due sostituzioni $\beta = \alpha + \varrho$, $\beta = \alpha - \varrho$, noi otteniamo

$$\frac{1}{2}\int_\varrho^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{-\varrho}^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda. \tag{8}$$

Osservando intanto che è

$$\int_0^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda = 0, \tag{9}$$

perchè $\varphi(x)$ verifica la condizione A), ed osservando inoltre che si può scrivere

$$\int_0^\varrho d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda = \int_{-\varrho}^0 d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \cos \beta\lambda \, d\lambda,$$

perchè basta mutare β in $-\beta$ per passare dall' uno all'altro di questi due integrali, noi otteniamo che per la funzione ψ data da (5) vale la formula preliminare (6); dunque tale funzione verifica la (1). In questo procedimento, noi, per giustificare la (6), ne abbiamo dedotto la (9); la possibilità evidente di eseguire il cammino inverso, scrivendo la (9) e poi passando alla

(8) ed alla (7), e da questa alla (6), vale a rendere legittimo questo procedimento. Cosa analoga può dirsi circa le deduzioni relative alla (4).

Ora consideriamo, al posto di (5), la funzione $\psi(x) = \varphi(x) \sin \varrho x$. Sostituendo nella (6), dovremo scrivere

$$\int_0^\infty d\alpha \int_c^\infty \varphi(\lambda) \frac{\sin(\varrho + \alpha)\lambda + \sin(\varrho - \alpha)\lambda}{2} d\lambda$$
$$= \frac{1}{2}\int_\rho^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \sin \beta\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\rho d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \sin \beta\lambda \, d\lambda .$$

Osservando che i due integrali, estesi rispettivamente ai due intervalli (ϱ, ∞), $(-\infty, \varrho)$, si riuniscono in uno solo, esteso all'intervallo $(-\infty, \infty)$, e che poi si può scrivere $\left(\text{spezzandolo ancora in } \int_0^\infty \text{ e in } \int_{-\infty}^0\right)$

$$\int_0^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \sin \beta\lambda \, d\lambda + \int_\infty^0 d(-\beta) \int_c^\infty \varphi(\lambda) \sin(-\beta)\lambda \, d\lambda = 0,$$

otteniamo che la (6) vale anche per $\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \cos \varrho\lambda$, e che la (1) vale per $\psi(x) = \varphi(x) \cos \varrho x$.

Questa deduzione è subordinata all'esistenza dell'integrale

$$\int_0^\infty d\beta \int_c^\infty \varphi(\lambda) \sin \beta\lambda \, d\lambda ,$$

che si dimostra facilmente, con considerazioni perfettamente analoghe a quelle che nel mio citato lavoro mi servirono per dimostrare l'integrabilità, estesa a un intervallo infinito, della funzione $f(\alpha) = \int_c^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda$: credo inutile ora di ripeterle ancora.

Ciò che si è detto, rimane evidentemente valido anche se $\varphi(x)$ verifica le condizioni, alquanto più estese della A), indicate dalla sig.$^{\text{na}}$ Graziani. Riassumendo, si può dire: se $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n$; $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ sono parametri arbitrarî (non necessariamente distinti) se $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_n(x)$; $\theta_1(x)$, $\theta_2(x), \ldots, \theta_m(x)$ sono funzioni (non necessariamente distinte), che individualmente verificano la condizione A), e se $\mathrm{R}(x)$ rende convergente in modo assoluto l'integrale $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{R}(x)\, dx$, allora la funzione

$$\psi(x) = \mathrm{R}(x) + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(x) \cos \varrho_\nu x + \sum_{\nu=1}^{m} \theta_\nu(x) \cos \sigma_\nu x \tag{10}$$

si può esprimere mediante la formula integrale di Fourier.

Rimane con ciò stabilita, per esempio, la (4), ma rimane anche, per esempio, stabilita la seguente formula

$$\frac{\sin x}{\log x} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty \frac{\sin \lambda}{\log \lambda} \cos \alpha (\lambda - x)\, d\lambda \qquad (x > 0),$$

che non rientra nelle condizioni del Riemann-Weber.

Osserviamo che mediante la formula (10) si possono rappresentare, almeno in via approssimativa, moltissime funzioni.

Mineralogia — *Studi intorno a minerali sardi: alcune specie mineralogiche della provincia di Sassari* [1]. Nota del dott. AURELIO SERRA, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Ulteriori ricerche sulla heulandite di colle Giargada (Villanova-Monteleone).

Allo scopo di precisare se debbano invocarsi differenze nella struttura molecolare per render ragione dell'innalzamento notevole riscontrato nell'angolo $110 : 1\bar{1}0$ della *heulandite* già da me esaminata cristallograficamente [2], oppure se debba questo considerarsi come funzione della composizione chimica, ho creduto opportuno eseguire l'analisi di parecchi cristalli, in cui l'angolo sopra citato presentava un'ampiezza di circa 47°. I risultati più sotto esposti rispondono alla seguente formula: $(Ca, Mg, Na, K)O . Al_2O_3 . SiO_2 + 5H_2O$.

SiO_2	61,12
Al_2O_3	15,61
CaO	6,04
MgO	0,53
Na_2O	2,23
K_2O	0,94
H_2O	14,32
	100,79

E' evidente come questi valori ottenuti si scostino alquanto da quelli della tipica *heulandite*, che riporto:

SiO_2	59,2
Al_2O_3	16,8
CaO	9,2
H_2O	14,8
	100,0

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Sassari.

[2] Serra, *Studi intorno a minerali sardi: baritina di Bonvei (Mara) ed heulandite di colle Giuargada (Villanova-Monteleone)*. Rend. R. Acc. Lincei, 1909.