ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 4 luglio 1909.

Matematica. — *Sopra la teoria dei moduli di forme algebriche.* Nota 3ª del Socio E. BERTINI.

Nella introduzione alla Nota 2ª [1] si è accennato ad un teorema del piano, più generale di quello che fu esteso ad S_r nel n. 4 della Nota stessa. Qui si estende pure ad S_r quel teorema generale deducendolo, con semplici considerazioni, appunto dal caso particolare del detto n. 4.

1. Si vuole cioè dimostrare il seguente teorema:

Se r *ipersuperficie* $F_1, F_2, \dots, F_r$ *hanno soltanto punti* P_i *comuni che sieno* $(s_1^{(i)}\, s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)}\, \alpha^{(i)})$ *ed* F *è una tale ipersuperficie che per ciascun punto* P_i *esistano ipersuperficie* $B^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_r^{(i)}$ *di ordini opportuni e delle quali* $B^{(i)}$ *non passi per* P_i, *così che la ipersuperficie*

$$B^{(i)}F + A_1^{(i)}F_1 + A_2^{(i)}F_2 + \cdots + A_r^{(i)}F_r = 0 \tag{1}$$

abbia in P_i *la moltiplicità*

$$\sigma^{(i)} = \alpha^{(i)} - s_1^{(i)}\, s_2^{(i)} \dots s_r^{(i)} + s_1^{(i)} + s_2^{(i)} + \cdots + s_r^{(i)} - r + 1\,,$$

la F *appartiene al modulo delle* $F_1, F_2, \dots, F_r$.

Premesso che nella (1) la $B^{(i)}$ si può immaginare di ordine tanto alto quanto si vuole, bastando a tale scopo di moltiplicare la (1) per una forma

[1] Nel n. 1 di questa Nota 2ª deve scriversi sempre $s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \dots, s_r^{(1)}$ invece di $s_1, s_2, \dots, s_r$.

generica, osserviamo poi che si può anche ritenere che la stessa ipersuperficie $B^{(i)}$ non passi per *alcun* punto P_i. Così se $B^{(1)}$, ad es., che non passa per P_1 secondo l'enunciato del teorema, passasse per alcuni degli altri punti P_i, aggiungeremmo al primo membro della (1), fattovi $i = 1$, un prodotto $\beta^{(1)}F$, essendo $\beta^{(1)}$ una ipersuperficie (composta, ad es., di coni ed iperpiani) d'ordine opportunamente alto (eguale all'ordine di $B^{(1)}$), così che essa abbia in P_1 la moltiplicità $\sigma^{(1)}$ (almeno), non passi per alcuno dei detti punti P_i, pei quali passa $B^{(1)}$, e passi per i rimanenti, pei quali non passa $B^{(1)}$. Allora è evidente che la $B^{(1)} + \beta^{(1)}$, che viene a comparire nella (1) invece di $B^{(1)}$, è una ipersuperficie che non passa per alcun punto P_i.

Oltre a ciò, possiamo supporre tutte le $B^{(i)}$ eguali, il che, se non fosse, si ottiene moltiplicando la (1) per il prodotto $B^{(1)} \ldots B^{(i-1)} . B^{(i+1)} \ldots$

Sicchè, senza alcuna limitazione, l'ipotesi del teorema equivale a questa altra, che per ogni punto P_i si abbia una ipersuperficie

$$BF + A_1^{(i)}F_1 + A_2^{(i)}F_2 + \cdots + A_r^{(i)}F_r = 0 \tag{2}$$

avente in esso moltiplicata $\sigma^{(i)}$, *essendo* B *una stessa ipersuperficie per tutti i punti* P_i, *la quale non passa per alcuno di questi punti.*

Prendasi, in relazione a ciascun punto P_i, una ipersuperficie Φ_i (composta, ad es., di coni) di ordine abbastanza elevato (il medesimo per tutti i punti P_i), la quale non passi per il punto P_i ed abbia in ogni altro punto P_i la moltiplicità $\sigma^{(i)}$. La ipersuperficie che si ottiene moltiplicando la (2) per Φ_i soddisfa manifestamente alla condizione del teorema del n. 4 (Nota 2ª): onde la ipersuperficie

$$\Phi_i(BF + A_1^{(i)}F_1 + \cdots + A_r^{(i)}F_r) = 0$$

appartiene al modulo $(F_1 F_2 \ldots F_r)$. Segue che a questo modulo appartiene anche la

$$\Phi_i BF = 0$$

ed anche, sommando tutte queste equazioni, la ipersuperficie

$$F . B(\Phi_1 + \Phi_2 + \cdots) = 0 .$$

Ma, per la scelta fatta delle Φ_i, la ipersuperficie data dalla somma fra le parentesi non passa per alcuno dei punti P_i: e però, ciò essendo anche per la ipersuperficie B, dalla precedente segue, in virtù di un teorema noto [1], che F appartiene al modulo $(F_1 F_2 \ldots F_r)$: c. d. d.

[1] Severi, *Su alcune proprietà...*, n, 4, già citato nella Nota 1ª.

2. Con considerazione analoga a quella del n. 5 della Nota 2ª si trova, come estensione del precedente teorema, quest'altro: *Se $h (< r)$ ipersuperficie* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *si segano in una Φ_{r-h} qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile, che sia* $(s_1 s_2 \ldots, s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \ldots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie*

$$BF + A_1 F_1 + \cdots + A_h F_h = 0 \tag{3}$$

abbia la parte stessa multipla secondo il numero

$$\alpha - s_1 s_2 \ldots s_h + s_1 + s_2 + \cdots + s_h - h + 1, \tag{4}$$

F *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \ldots F_h)$.

3. Infine si può trarre dai due teoremi precedenti il seguente: *Se $h (\leq r)$ ipersuperficie* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *si segano in una Φ_{r-h} qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile (o punto se $r = h$), che sia* $(s_1 s_2 \ldots s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \ldots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie* (3) *passi comunque per la parte stessa,* F^σ *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \ldots F_h)$, *essendo σ non minore del massimo dei numeri* (4).

Infatti, elevando ciascuna (3) alla potenza σ, si hanno evidentemente per F^σ le ipotesi dei teoremi dei n. 1, 2.

Matematica. — *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^{2i} U = 0$ per le aree piane.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Nella mia comunicazione al IV Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908) indicavo un metodo atto a integrare l'equazione $\Delta^{2i} U = 0$, per dati valori al contorno di U e delle sue derivate normali dei primi $i - 1$ ordini, ed equazioni ancora più generali. Ivi limitavo i miei calcoli, per dimostrare il teorema di esistenza, al caso di $i = 3$ e delle *tre* dimensioni; però essi possono estendersi al caso di i qualsiasi e di un numero qualunque di dimensioni. Il detto metodo è la generalizzazione di quello che avevo dato circa un anno prima per il caso di $i = 2$ e delle *tre* dimensioni [1].

Ancora prima della pubblicazione di questo caso, ero in possesso, per $i = 2$ e per le *due* dimensioni, di un metodo del tutto diverso e più diretto, pubblicato ora nel vol. 32 degli Acta Mathematica [2]. Questo metodo, che caratterizza il caso delle *due* dimensioni e che suggerisce l'estensione di

[1] *Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^4 V = 0$.* Rend. Acc. Lincei, vol. XVI, 2° sem.
[2] *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.*