ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Fisica. — *Sulle osservazioni sismiche* [1]. Nota del dott. ANTONINO LO SURDO, presentata dal Socio RÒITI.

Il comportamento di una colonna liquida usata come massa sismometrica.

Un recipiente di forma qualsiasi a pareti rigide riempito completamente da un liquido, venga assoggettato ad un moto rettilineo $x = f(t)$, per es., secondo la AB (fig. 1). La massa del liquido spinta dalle pareti è costretta a seguire lo stesso movimento del recipiente, quindi su ogni elemento di massa dm agisce in ogni istante una forza $x''dm$ diretta secondo AB, la quale deve compensare la reazione d'inerzia $-x''dm$. Tutte le forze parallele $-x''dm$ sugli elementi di massa, agiranno evidentemente allo stesso modo di quelle gdm dovute alla gravità, e ne risulta che secondo la direzione AB si avranno gli stessi fenomeni idrostatici i quali si osservano rispetto alla verticale nei liquidi pesanti in quiete. La differenza sta nell'accelerazione che per i liquidi pesanti è costante ed ha il valore g, mentre nei liquidi inerti è variabile, ed ha in ogni istante il valore $-x''$.

FIG. 1.

Fra due punti 1 *e* 2 *all'interno della massa liquida, avremo dunque una differenza di pressione dovuta all'inerzia, che sarà espressa da:*

$$p_1 - p_2 = l\sigma x'' ;$$

σ indica la densità del liquido, e l la distanza ST fra le proiezioni dei punti 1 e 2 sulla AB, e si suppone che i punti S e T si succedano nel verso positivo [1].

[1] Lavoro eseguito nel R. Istituto di Studî Superiori in Firenze. Vedi Nota precedente pubblicata in questo Vol. dei Rendiconti, fasc. 6°.

[2] Si può mettere in evidenza l'analogo del principio di Archimede nei liquidi inerti colla seguente esperienza molto semplice. In un recipiente pieno di liquido, per es. acqua, si pongano due corpi uno di densità minore e l'altro maggiore del liquido, due sferette (fig. 2), rispettivamente di sughero 1, e d'ottone 2. Accelerando il moto del recipiente, per es. secondo la freccia, noi vedremo la sferetta di sughero spostarsi nel senso stesso della freccia verso A, e quella di ottone in senso inverso, come avverrebbe se il tubo si trovasse disposto verticalmente sulla base CD. Una esperienza consimile è fatta dal Bjerknes, per mostrare l'estensione del principio di Archimede ai campi idrodinamici.

Posto ciò, supponiamo che il recipiente sia rigidamente connesso al suolo; le differenze di pressione che si avranno allora fra due punti della massa liquida dipenderanno dal moto di questo, e precisamente, per la relazione ora scritta, supponendo trattarsi di sole traslazioni, saranno proporzionali all'accelerazione sismica. Viene quindi ora spontanea l'idea di vedere se è possibile approfittare di queste differenze di pressione per la determinazione dell'accelerazione sismica, e perciò ci proponiamo di studiare l'impiego di un liquido come massa sismometrica.

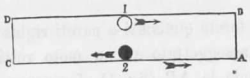

Fig. 2.

Per metterci in condizioni particolarmente semplici, supponiamo che il liquido abbia la forma di una colonna cilindrica, il cui asse sia disposto secondo la direzione in cui avviene il moto. La colonna possa muoversi longitudinalmente entro il tubo che la contiene, ed una pressione antagonista tenda a ricondurla in una determinata posizione di riposo, dalla quale noi contiamo gli spostamenti a; la pressione antagonista cresca inoltre proporzionalmente allo spostamento dalla posizione di riposo.

La colonna liquida in queste condizioni si comporterà come un qualsiasi sistema oscillante sismometrico, valgono quindi per essa le condizioni che noi abbiamo stabilito colla Nota precedente, per la registrazione dell'accelerazione sismica.

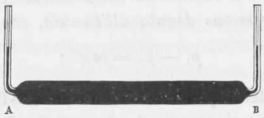

Fig. 3.

Nel caso che si voglia determinare una componente orizzontale, l'asse della colonna liquida deve trovarsi in un piano orizzontale, e si può ottenere la pressione antagonista in modo semplice, contenendo cioè la massa in un tubo ad U (fig. 3) nel quale però i due rami verticali, ne vedremo ora la ragione, devono essere di sezione molto più piccola di quella della colonna orizzontale.

Spostando di a il liquido dalla sua posizione di riposo nella colonna principale, il menisco di ogni ramo verticale sottile si sposterà di $y = na$, se n indica il rapporto fra le sezioni dei due tubi; si produrrà quindi una pressione antagonista eguale a $2na\sigma g$. Per lo spostamento unitario questa

pressione ha il valore $2n\sigma g$; quindi la corrispondente accelerazione antagonista, potendo considerarsi la massa per unità di sezione uguale ad $L\sigma$, dove L indica la lunghezza della colonna orizzontale, sarà data da $2n\sigma g/L\sigma$.

Al sistema, trascurando la massa nei due rami sottili, è quindi applicabile la solita equazione del moto:

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega$$

che nel nostro caso prende la forma:

$$a'' + 2\alpha a' + \frac{2ng}{L} a = \Omega . \tag{1}$$

2α rappresenta come al solito l'accelerazione della forza di smorzamento, ed Ω l'accelerazione sismica $-x''$.

Il periodo proprio del sistema non smorzato sappiamo essere $2\pi/\beta$, nel nostro caso abbiamo dunque:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{2ng}} . \tag{2}$$

Lo spostamento della colonna per l'unità di accelerazione è:

$$K_x = \frac{1}{\beta^2} = \frac{L}{2ng} ,$$

quindi lo spostamento dei menischi nei rami verticali, risulta:

$$K_y = \frac{L}{2g} \tag{3}$$

e noi assumeremo questo come sensibilità del sistema.

Osserviamo dunque che:

la sensibilità ed il periodo proprio del sistema sono indipendenti dalla densità del liquido,

la sensibilità è proporzionale alla lunghezza della colonna liquida.

Noi abbiamo stabilito in generale che, perchè il moto della massa, e quindi della penna scrivente nei sismografi, rappresenti il più fedelmente possibile l'andamento dell'accelerazione sismica, il periodo proprio del sistema oscillante non smorzato sia il più piccolo possibile. Ora, nel caso di una colonna liquida, per la (2), si potrebbe far piccolo il periodo di oscillazione col ridurre la lunghezza L. Coll'impicciolire L però, noi verremmo a diminuire la sensibilità; e siccome il periodo dipende anche da n, è chiaro che noi *aumentando il rapporto delle sezioni possiamo impicciolire il periodo senza diminuire la sensibilità,* che perciò può essere stabilita opportunamente.

Per la componente verticale noi dobbiamo disporre verticalmente anche la colonna AB. Si possono raggiungere approssimativamente le stesse condizioni di funzionamento precedentemente esaminate, dando al recipiente la forma della fig. 4. La colonna viene sostenuta dalla pressione di un gas racchiuso in un bulbo C, il cui volume si fa tanto grande da poter trascurare le variazioni di pressione del gas che esso contiene, quando il menisco si sposta lungo il cannello capillare D. La lunghezza della colonna liquida utile ci è data dalla distanza verticale fra i due menischi i quali, per la forma del tubo, si trovano sulla stessa verticale affinchè l'apparecchio sia insensibile alle componenti orizzontali dell'accelerazione.

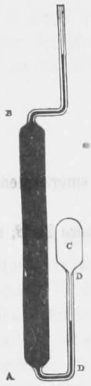

Fig. 4.

Nella precedente Nota abbiamo anche indicato esser preferibile di usare lo smorzamento critico, cioè di fare $\alpha = \beta$. Nel nostro caso, stabilito il valore opportuno di β, noi possiamo ottenere che lo smorzamento sia quello corrispondente anche senza variare n ed L; per esempio scegliendo il tubo sottile di diametro opportuno, od anche variando la lunghezza della colonna liquida ne rami sottili.

L'accelerazione della pressione smorzatrice, cioè 2α, si può calcolare nel modo seguente. Dalla legge di Poiseuille sul flusso dei liquidi nei tubi cilindrici, si ricava:

$$p_0 - p = \varrho \frac{8lV}{\pi r^4}, \tag{4}$$

dove $p_0 - p$ è la differenza di pressione fra gli estremi di un tubo lungo l e di raggio r, alla quale corrisponde il flusso di un volume V di liquido al secondo, ϱ è il coefficiente d'attrito del liquido.

Nel nostro caso trascuriamo l'attrito nel tubo grosso e le azioni terminali dei menischi, e quindi indichiamo con l la lunghezza complessiva della colonna liquida nei due tratti capillari; in questi la velocità di spostamento in un dato istante è $n\frac{da}{dt}$, e il volume di liquido che fluirebbe in un secondo se essa si mantenesse costante è quindi $V = sn\frac{da}{dt}$, indicando con s la sezione dei cannelli. Sostituito questo valore nella (4) si ottiene:

$$p_0 - p = \varrho \frac{8lns}{\pi r^4} \frac{da}{dt}$$

per la pressione che serve a vincere l'attrito e che risulta proporzionale alla

velocità, come abbiamo supposto implicitamente. L'accelerazione per $\frac{da}{dt}=1$, cioè 2α, è quindi:

$$2\alpha = \frac{8lns}{L\sigma\pi r^4}$$

da cui:

$$\alpha = \varrho \frac{4n}{L\sigma} \frac{l}{r^2}.$$

È evidente che il calcolo potrà darci soltanto approssimativamente il valore del coefficiente α: esso però può venire determinato sperimentalmente col seguente metodo.

Supponiamo di collocare l'apparecchio su una piattaforma mobile, che noi assoggettiamo ad un moto oscillatorio di ampiezza B e di periodo θ nella direzione della colonna liquida principale.

In questo moto, lo spostamento è:

$$x = \mathrm{B} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varphi\right),$$

e l'accelerazione:

$$x'' = -\mathrm{B} \frac{4\pi^2}{\theta^2} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varphi\right);$$

che indicata con

$$\Omega = \Omega_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varphi\right),$$

e sostituita nella (1) dà l'equazione del moto della colonna liquida in questo caso:

$$a'' + 2\alpha a' + \beta^2 a = \Omega_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varphi\right). \tag{5}$$

Quindi si potrà ritenere che:

$$a = \mathrm{A} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi\right)$$

rappresenti il moto del liquido nella colonna principale, che si stabilisce dopo un tempo sufficientemente lungo, perchè risulti trascurabile la prima parte dell'integrale, la funzione complementare, la quale rappresenta il moto proprio smorzato del sistema.

Noi possiamo ricavare la relazione tra A ed Ω_0, come pure la differenza di fase $\psi - \varphi$ mediante gli stessi procedimenti usati per i circuiti elettrici con correnti alternate sinusoidali. Per esempio, applicando la rap-

presentazione polare, le tre grandezze sinusoidali contenute nel primo membro della (5):

$$\beta^2 a = \beta^2 \mathrm{A} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi\right)$$

$$2\alpha a' = 2\alpha \mathrm{A} \frac{2\pi}{\theta} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a'' = \mathrm{A} \frac{4\pi^2}{\theta^2} \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \psi + \pi\right)$$

risultano rappresentate come nella fig. 5.

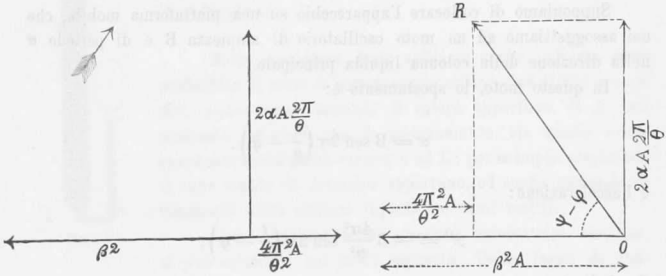

Fig. 5. Fig. 6.

La loro somma, per la (5), dà la grandezza sinusoidale

$$\Omega = \Omega_0 \operatorname{sen} 2\pi \left(\frac{t}{\theta} - \varphi\right).$$

Componendo quindi questi tre vettori (fig. 6), otteniamo il vettore OR la cui grandezza è uguale ad Ω_0. E quindi dev'essere:

$$\Omega_0^2 = \left[\frac{4\pi^2}{\theta^2} 4\alpha^2 + \left(\beta^2 - \frac{4\pi^2}{\theta^2}\right)^2\right] \mathrm{A}^2 .$$

Dalla quale relazione si può trarre l'espressione di α in funzione di quantità note.

Daremo prossimamente un saggio sulla pratica applicazione dei principî finora esposti.