ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Te—Al a voltaggi elevati, la corrente continua che si ottiene è contraria alla corrente termoelettrica che si svilupperebbe per riscaldamento al contatto; poi i valori dell'intensità della corrente rettificata anche nel caso del contatto tellurio-alluminio a voltaggi alti sono tali da escludere senz'altro la possibilità di una spiegazione basata su semplici fenomeni termoelettrici. Nel caso poi delle cellule ordinarie a Se, nelle quali la differenza fra le due zone di contatto: Se-metallo e metallo-Se non possono essere così marcate come nei rettificatori su ricordati, in cui si cerca appositamente che uno solo dei contatti sia ad alta resistenza, il cercare la spiegazione in un effetto termoelettrico dipendente da una differenza di effetto Joule nei due contatti appare ancora meno accettabile, perchè in generale l'intensità della corrente raddrizzata è troppo forte, data la resistenza interna delle cellule stesse poi perchè, invertendo l'inserzione degli elettrodi della cellula nel circuito, il senso della corrente raddrizzata spesso non cambia; finalmente poi perchè l'effetto raddrizzatore non è molto più grande nei preparati ad elettrodi disuguali, anzi è inferiore a quello di molti preparati ad elettrodi eguali e invece dipende dalla resistenza della cellula, crescendo al crescere di questa. Da queste e dalle mie presenti ricerche si rileva sempre che il comportamento anomalo del Selenio, pel quale questo si differenzia sostanzialmente da tutti gli altri conduttori, è tanto più marcato quanto più alta è la resistenza del preparato studiato: i preparati di Se che si trovano in uno stadio di alta resistenza, sia questa dovuta alla preparazione speciale o alle condizioni termiche in cui si trovano, oppure infine sia prodotta artificialmente con i trattamenti con correnti alternanti descritti nelle Note precedenti, hanno una maggiore deviazione dalla legge di Ohm, sono capaci di fornire, a parità di altre condizioni, una più grande corrente secondaria e infine posseggono una più rilevante attitudine a raddrizzare la corrente alternata.

Matematica. — *Sopra una formola generale nel Calcolo delle estensioni.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

In una estensione semplice di Grassmann dell'ordine ν, siano scelti un gruppo di elementi indipendenti $e_1, e_2, \dots, e_\nu$, una estensione semplice subordinata M dell'ordine $\nu - \sigma$, ed un altro gruppo di elementi, indipendenti o non, $x_1, x_2, \dots, x_\rho$, coi quali si compongano i prodotti

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = x_1 e_1 e_2 \dots e_\sigma . \mathrm{M} \\ x'_2 = x_2 e_1 e_2 \dots e_\sigma . \mathrm{M} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x'_\rho = x_\rho e_1 e_2 \dots e_\sigma . \mathrm{M}\,; \end{array}\right.$$

si tratta di provare che

$$x_1'x_2' \dots x_\rho' = (e_1e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})^{\rho-1} x_1 x_2 \dots x_\rho \, e_1e_2 \dots e_\sigma . \mathrm{M} . \tag{2}$$

Per $\sigma = 1$ la formula venne data dal sig. Whitehead nel suo libro: *Universal Algebra*, pag. 224; e, per $\sigma > 1$, non solo la formula, per quanto a me consta, non venne enunciata, ma non mi fu possibile, nell'intento di provarla con la debita evidenza, seguire il modo di ragionamento tenuto da questo geometra. Mi fu necessario seguire un modo di dimostrazione diretto [1] che abbraccia, così, pure il caso di $\sigma = 1$.

Data la importanza della formula, anche nella sua semplice interpretazione geometrica di proiezione da uno spazio lineare a $\sigma - 1$ dimensioni, in uno spazio lineare a $\nu - 1$ dimensioni, sopra uno spazio di dimensioni $\nu - \sigma - 1$, mi è parsa sufficientemente giustificata la pubblicazione di questa Nota.

1. In virtù del teorema *ampliato* del medio fattore, le (1) possono essere scritte come segue:

$$\left\{\begin{aligned}
x_1' &= \sum_{i_1=1}^{i_1=\sigma} (-1)^{\sigma-i_1}(x_1 e_1 \dots \bar{e}_{i_1} \dots e_\sigma \mathrm{M})\, e_{i_1} + \\
&\qquad + (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_1 = \mathrm{A}_1 + (-1)^\sigma \mathrm{B}_1 \\
x_2' &= \sum_{i_2=1}^{i_2=\sigma} (-1)^{\sigma-i_2}(x_2 e_1 \dots \bar{e}_{i_2} \dots e_\sigma \mathrm{M})\, e_{i_2} + \\
&\qquad + (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_2 = \mathrm{A}_2 + (-1)^\sigma \mathrm{B}_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_\rho' &= \sum_{i_\rho=1}^{i_\rho=1} (-1)^{\sigma-i_\rho}(x_\rho e_1 \dots \bar{e}_{i_\rho} \dots e_\sigma \mathrm{M})\, e_{i_\rho} + \\
&\qquad + (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_\rho = \mathrm{A}_\rho + (-1)^\sigma \mathrm{B}_\rho ,
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

avendo posto, per brevità

$$\mathrm{A}_k = \sum_{i_k=1}^{i_k=\sigma} (-1)^{\sigma-i_k}(x_k e_1 \dots \bar{e}_{i_k} \dots e_\sigma \mathrm{M})\, e_{i_k} \quad , \quad \mathrm{B} = (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_k \tag{4}$$

$$(k = 1 , 2 , \dots , \varrho),$$

avendo significato con lo scrivere $\bar{e}_{i_k}$ l'assenza del fattore e_{i_k} nel prodotto $x_k e_1 e_2 \dots e_\sigma$, ed avendo inteso con i_k rappresentare uno dei numeri da 1 a σ.

[1] Anche nel caso di $\sigma = 1$, il sig. Whitehead ritiene nuova la formula da lui data. Il modo di ragionamento da lui tenuto consiste, a meno di una variante di forma, sostanzialmente, nel così detto passaggio da ϱ a $\varrho + 1$. Qualche denominazione, o notazione, si è mantenuta in questo scritto conforme a quella adoperata dal Whitehead (così ad es., i prodotti chiusi in parentesi tonde sono costantemente prodotti numerici); qualche altra no.

Moltiplicando membro a membro le (3), ed indicando con $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_p$ una combinazione di classe p dei numeri $1, 2, \dots, \varrho$ scritta in guisa che sia $\eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_p$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
& x'_1 x'_2 \dots x'_\varrho = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_\varrho + \\
(5) \qquad & + \sum_{\binom{\varrho}{p}} \sum_{p=1}^{p=\varrho-1} (-1)^{p\sigma} \mathrm{A}_1 \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_p} \dots \mathrm{A}_\varrho + (-1)^{\varrho\sigma} \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \dots \mathrm{B}_\varrho,
\end{aligned}
$$

dove è da tenersi presente che il prodotto $\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_p} \dots \mathrm{A}_\varrho$ è formato considerando il prodotto $\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_\varrho$ e sostituendo al posto dei fattori $\mathrm{A}_{\eta_1}, \mathrm{A}_{\eta_2}, \dots, \mathrm{A}_{\eta_\varrho}$ rispettivamente $\mathrm{B}_{\eta_1}, \mathrm{B}_{\eta_2}, \dots, \mathrm{B}_{\eta_\varrho}$, e dove, per ogni valore di p cui si riferisce il secondo sommatorio, il primo è da intendersi esteso a tutte le combinazioni di classe p di ϱ elementi. Se conveniamo di includere nel tipo $(-1)^{p\sigma} \mathrm{A}_1 \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_p} \dots \mathrm{A}_\varrho$ anche il termine $\mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 \dots \mathrm{A}_\varrho$ in corrispondenza del valore $p = 0$ di p, il che è possibile perchè $(-1)^{p\sigma} = (-1)^0 = 1$ nel caso in esame, $\binom{p}{0} = 1$ per nota convenzione, ed il prodotto $\mathrm{A}_1 \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_\varrho} \dots \mathrm{A}_\varrho$ non possiede più alcun fattore B, visto che il termine $(-1)^{\varrho\sigma} \mathrm{B}_1 \mathrm{B}_2 \dots \mathrm{B}_p$ scritto nella (5) a titolo di maggior chiarezza, è effettivamente incluso in quel tipo per $p = \varrho$, ne deduciamo che la (5) può essere scritta più comprensivamente nella forma

$$
(6) \qquad x'_1 x'_2 \dots x'_\varrho = \sum_{\binom{\varrho}{p}} \sum_{p=0}^{p=\sigma} (-1)^{\varrho\sigma} \mathrm{A}_1 \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_p} \dots \mathrm{A}_\varrho,
$$

dalla quale si vede chiaramente che i 2^p termini del 2° membro sono associati rispettivamente in gruppi di $\binom{\varrho}{0}, \binom{\varrho}{1}, \dots, \binom{\varrho}{p}, \dots, \binom{\varrho}{\varrho}$ ciascuno.

Scegliamo nel gruppo generico di $\binom{\varrho}{p}$ termini, il generico termine

$$
(7) \qquad \mathrm{A} = (-1)^{p\sigma} \mathrm{A}_{r_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_1} \dots \mathrm{B}_{\eta_2} \dots \mathrm{B}_{\eta_p} \dots \mathrm{A}_{rq},
$$

ove $r_1 r_2 \dots r_q$ è la combinazione dei numeri $1, 2, \dots, \varrho$ (di classe $q = \varrho - p$) complementare della $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_p$, scritta per modo che sia $r_1 < r_2 < \dots < r_q$, e notiamo subito che, posto

$$
(8) \qquad \alpha = (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M}) \quad , \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p,
$$

per essere α un numero, esso può essere scritto nella forma

$$
(9) \qquad \mathrm{A} = (-1)^{p\sigma + p\varrho + \frac{p(p-1)}{2} - \eta} \,.\, \alpha^p \mathrm{A}_{r_1} \mathrm{A}_{r_2} \dots \mathrm{A}_{rq} x_{\eta_1} x_{\eta_2} \dots x_{\eta_p},
$$

e di tal termine trasformiamo il fattore

$$A_{r_1} A_{r_2} \dots A_{r_q} = \sum_{i_{r_1}=1}^{i_{r_1}=\sigma} (-1)^{\sigma - i_{r_1}} (x_{r_1} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_1}} \dots e_\sigma M) \times$$

$$\times \sum_{i_{r_2}=1}^{i_{r_2}=\sigma} (-1)^{\sigma - i_{r_2}} (x_{r_2} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_2}} \dots e_\sigma M), \dots \sum_{i_{r_q}=1}^{i_{r_q}=\sigma} (-1)^{\sigma - i_{r_q}} (x_{r_q} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_q}} \dots e_\sigma M).$$

Poichè le espressioni

$$(-1)^{\sigma - i_{r_k}} (x_{r_k} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_k}} \dots e_\sigma M) \quad (k = 1, 2, \dots, q)$$

sono tutte dei numeri, potremo scrivere, ponendo $i_r = i_{r_1} + i_{r_2} + \dots + i_{r_q}$,

$$(10) \qquad A_{r_1} A_{r_2} \dots A_{r_q} = \Sigma (-1)^{q\sigma - i_r} \prod_{k=1}^{k=q} (x_{r_k} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_k}} \dots e_\sigma M) \, e_{i_{r_k}},$$

dove il Σ è da intendersi esteso a tutti i valori delle $i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_q}$ da $1 = \sigma$ per ciascuno. Si riconosce subito che tutti i termini di una tal somma, i quali provengono per valori uguali di due delle $i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_q}$ sono nulli, perchè, in tal caso, due almeno dei fattori $e_{i_{r_1}}, e_{i_{r_2}}, \dots, e_{i_{r_q}}$ sono eguali, ed altrettanto dicasi nel caso in cui sia $q > \sigma$, perchè allora, nel prodotto $e_{i_{r_1}} e_{i_{r_2}} \dots e_{i_{r_q}}$ uno almeno dei fattori si trova ripetuto. Perciò la precedente somma si dovrà intendere estesa soltanto ai termini che si hanno per valori distinti delle $i_{r_1}, i_{r_2}, \dots, i_{r_q}$, e per q non superiore a σ; e tali termini sono tanti quante sono le disposizioni, senza ripetizione, della classe q di σ elementi. Aggruppiamo queste disposizioni in modo che quelle di ogni gruppo costituiscano una medesima combinazione della classe q; in ogni gruppo ve ne saranno $q!$ e tutti i gruppi saranno in numero di $\binom{\sigma}{q}$. In ogni termine corrispondente ad uno di questi gruppi ordiniamo i fattori del prodotto $e_{i_{r_1}} e_{i_{r_2}} \dots e_{i_{r_q}}$ in modo che $i_{r_1} i_{r_2} \dots i_{r_q}$ costituiscano la permutazione principale che supporremo rappresentata da $s_{r_1} s_{r_2} \dots s_{r_q}$; allora, se h è il numero delle inversioni presentate dalla $i_{r_1} i_{r_2} \dots i_{r_q}$ in confronto della $s_{r_1} s_{r_2} \dots s_{r_q}$, avremo

$$e_{i_{r_1}} e_{i_{r_2}} \dots e_{i_{r_q}} = (-1)^h e_{s_{r_1}} e_{s_{r_2}} \dots e_{s_{r_q}},$$

e tutti i termini corrispondenti al gruppo considerato nel secondo membro della (10) saranno quelli contenuti nella somma

$$(11) \qquad \begin{aligned} H = (-1)^{q\sigma - i_r} . \Sigma (-1)^h (x_{r_1} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_1}} \dots e_\sigma M) (x_{r_2} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_2}} \dots e_\sigma M) \dots \\ (x_{r_q} e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_q}} \dots e_\sigma M) \, e_{s_{r_1}} e_{s_{r_2}} \dots e_{s_{r_q}}, \end{aligned}$$

ove h ha il significato indicato e varia da termine a termine.

Se provvisoriamente poniamo

$$\Delta = \begin{vmatrix} (x_{r_1} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) & (x_{r_1} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \ldots & (x_{r_1} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \\ (x_{r_2} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) & (x_{r_2} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \ldots & (x_{r_2} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ (x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) & (x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \ldots & (x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \end{vmatrix},$$

avremo, evidentemente,

$$\Sigma(-1)^h (x_{r_1} e_1 \ldots \bar{e}_{i r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M})(x_{r_2} e_1 \ldots \bar{e}_{i r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) \ldots (x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{i r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) = \Delta,$$

epperò

$$\text{(12)} \qquad \mathrm{H} = (-1)^{q\sigma - i_r} . \Delta .$$

Ora, per un noto teorema, fondamentale del calcolo delle estensioni, si ha pure

$$\text{(13)} \qquad \Delta = x_{r_1} x_{r_2} \ldots x_{r_q} . [e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M}][e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}] \ldots [e_s \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}],$$

e pel teorema *semplice* del medio fattore, successivamente

$$[e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots e_\sigma \mathrm{M}][e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) =$$
$$= (-1)^{s r_2 - 2} . (e_{s r_2} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}$$
$$= (-1)^{2 s r_2 - 3} \alpha e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}$$

$$[e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots e_\sigma \mathrm{M}][e_1 \ldots \bar{e}_{s r_3} \ldots e_\sigma \mathrm{M}] =$$
$$= (-1)^{s r_3 - 3} . (e_{s r_3} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_3} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_3} \ldots e_\sigma \mathrm{M}$$
$$= (-1)^{2 s r_2 - 4} \alpha e_1 \ldots \bar{e}_{r_1} \ldots \bar{e}_{r_2} \ldots \bar{e}_{r_3} \ldots e_\sigma \mathrm{M}$$

. . . .

$$[e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_{q-1}} \ldots e_\sigma \mathrm{M}][e_1 \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}] =$$
$$= (-1)^{s r_q - q} (e_{s r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}$$
$$= (-1)^{2 s r_q - (q+1)} \alpha e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M};$$

quindi, in fine, tenuto conto che $(-1)^{-3-4-\cdots-(q+1)} = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}}$:

$$\text{(14)} \qquad \Delta = (-1)^{\frac{q(q-1)}{2}} \cdot \alpha^{q-1} x_{r_1} x_{r_2} \ldots x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M},$$

e, per le (12), (10)

$$\mathrm{H} = (-1)^{q\sigma - i_r + \frac{q(q-1)}{2}} \cdot \alpha^{q-1} (x_{r_1} x_{r_2} \ldots x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) e_{s r_1} e_{s r_2} \ldots e_{s r_q}$$

$$\mathrm{A}_{r_1} \mathrm{A}_{r_2} \ldots \mathrm{A}_{r_q} = (-1)^{q\sigma - i_r + \frac{q(q-1)}{2}} \alpha^{q-1} . \cdot \Sigma (x_{r_1} x_{r_2} \ldots x_{r_q} e_1 \ldots \bar{e}_{s r_1} \ldots \bar{e}_{s r_2} \ldots \bar{e}_{s r_q} \ldots e_\sigma \mathrm{M}) e_{s r_1} \ldots e_{s r_2} \ldots e_{s r_q},$$

il Σ dovendo essere esteso, come si è detto, a tutte le combinazioni distinte della classe q dei numeri da 1 a σ.

Se ne deduce, osservando la (9) e ricordando che $p+q=\varrho$, per A la espressione seguente

$$
(15)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{A}=(-1)^{p\sigma+p\varrho+q\sigma-i_r-\eta+\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}}\times\\
&\times\alpha^{\varrho-1}\Sigma(x_{r_1}x_{r_2}\dots x_{r_q}e_1\dots\bar{e}_{s_{r_1}}\dots\bar{e}_{s_{r_2}}\dots\bar{e}_{s_{r_q}}\dots e_\sigma\mathrm{M})\,e_{s_{r_1}}e_{s_{r_2}}\dots e_{s_{r_q}}x_{\eta_1}x_{\eta_2}\dots x_{\eta_p}\\
&=(-1)^{p\sigma+p\varrho+q\sigma+pq-i_2-\eta_\varrho+\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}}\times\\
&\times\alpha^{\varrho-}{}_1\Sigma(x_{r_1}x_{r_2}\dots x_{r_q}e_1\dots\bar{e}_{s_{r_1}}\dots\bar{e}_{s_{2_r}}\dots\bar{e}_{s_{r_q}}\dots e_\sigma\mathrm{M})\,x_{\eta_1}x_{\eta_2}\dots x_{\eta_p}e_{s_{r_1}}e_{s_{r_2}}\dots e_{s_{r_q}},
\end{aligned}
$$

il simbolo Σ avendo qui lo stesso significato or ora ricordato.

2. Formiamo ora il prodotto

$$
(16)\qquad x_1x_2\dots x_\varrho e_1e_2\dots e_\sigma\,.\,\mathrm{M}\,,
$$

e trasformiamolo in una somma con la regola ampliata del medio fattore; avremo, supponendo essere $r_1r_2\dots r_q\ \eta_1\eta_2\dots\eta_p$ una combinazione di classe $p+q=\varrho$ dei $\varrho+\sigma$ elementi $1,2,\dots,\varrho$, $1.2,\dots,\sigma$ (le r essendo prese fra gli $1\,2\dots\varrho$ e le η fra gli $1\,2\dots\sigma$ e scritte per modo da essere $r_1<r_2<\dots<r_q,\ \eta_1<\eta_2<\dots<\eta_p$) che un termine di tal somma, per essere

$$
\begin{gathered}
x_1x_2\dots x_\varrho e_1e_2\dots e_\sigma=\\
=(-1)^\mu x_{r_1}x_{r_2}\dots x_{r_q}e_1\dots\bar{e}_{i_{r_1}}\dots\bar{e}_{i_{r_2}}\dots\bar{e}_{i_{r_q}}\dots e_\sigma x_{\eta_1}x_{\eta_2}\dots x_{\eta_p}e_{i_{r_1}}e_{i_{r_2}}\dots e_{i_{r_q}}\\
\mu=(\varrho+\sigma)-\eta_1+(\varrho+\sigma)-\eta_2+1+(\varrho+\sigma)-\eta_3+2+\cdots\\
\cdots+(\varrho+\sigma)-\eta_\varrho+p-1+\\
+(p+\sigma)-i_{r_1}+(p+\sigma)-i_{r_2}+1+(p+\sigma)-i_{r_3}+2+\cdots\\
\cdots+(p+\sigma)-i_{r_q}+q-1\\
=p(\varrho+\sigma)+q(p+\sigma)-i_r-\eta+\frac{p(p-1)}{2}+\frac{q(q-1)}{2}\,,
\end{gathered}
$$

è

$$
(-1)^\mu(x_{r_1}x_{r_2}\dots x_{r_q}e_1\dots\bar{e}_{i_{r_1}}\dots\bar{e}_{i_{r_2}}\dots\bar{e}_{i_{r_q}}\dots e_\sigma\mathrm{M})\,x_{\eta_1}x_{\eta_2}\dots x_{\eta_p}e_{i_{r_1}}e_{i_{r_2}}\dots e_{i_{r_q}}\,;
$$

sicchè sarà, per (8),

$$
(17)\quad (-1)^\mu\alpha^{\varrho-1}(x_{r_1}x_{r_2}\dots x_{r_q}e_1\dots\bar{e}_{i_{r_1}}\dots\bar{e}_{i_{r_2}}\dots\bar{e}_{i_{r_q}}\dots e_\sigma\mathrm{M})\,x_{\eta_1}x_{\eta_2}\dots x_{\eta_p}e_{i_{r_1}}e_{i_{r_2}}\dots e_{i_{r_q}}
$$

un termine del prodotto

$$
(18)\qquad (e_1e_2\dots e_\sigma\mathrm{M})^{\varrho-1}x_1x_2\dots x_\varrho e_1e_2\dots e_\sigma\mathrm{M}\,.
$$

Ora, visto che μ è proprio l'esponente di -1 nella (15), un tal termine è pure un termine di A; così, tenuto conto dei varî valori di q, tutti i termini del prodotto (18) sono altrettanti termini delle espressioni A. Ma, nel prodotto (18) vi sono $\binom{\sigma+\varrho}{\varrho}$ termini, mentre che in una A generica essendovene $\binom{\sigma}{q}$ in tutte le A ve ne sono $\sum_{q=0}^{q=\varrho}\binom{\sigma}{q}\binom{\varrho}{p}=\sum_{p=0}^{p=\varrho}\binom{\sigma}{\varrho-p}\binom{\varrho}{p}$, ed è

$$\binom{\sigma+\varrho}{\varrho}=\binom{\sigma}{\varrho}\binom{\varrho}{0}+\binom{\sigma}{\varrho-1}\binom{\varrho}{1}+\cdots+\binom{\sigma}{0}\binom{\varrho}{\varrho},$$

dunque tutti i termini del prodotto (18) sono termini del prodotto (6) ed inversamente; vale a dire che si ha, c. v. d.,

$$x'_1\,x'_2\ldots x'_\rho=(e_1\,e_2\ldots e_\sigma\mathrm{M})^{\rho-1}\,x_1\,x_2\ldots x_\rho\,e_1\,e_2\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{M}\,. \tag{19}$$

Se M fosse l'estensione supplementare della $e_1\,e_2\ldots e_\sigma$, sicchè potesse scriversi

$$\mathrm{M}=|e_1\,e_2\ldots e_\sigma=|e_1\,.\,|e_2\ldots|e_\sigma$$

e fossero $e_1\,e_2\ldots e_\sigma$ nelle loro intensità normali e mutuamente reciproci, si avrebbe

$$(e_1\,e_2\ldots e_\sigma\mathrm{M})=(e_1\,e_2\ldots e_\sigma\,.\,|e_1|\,e_2\ldots|\,e_\sigma)=\begin{vmatrix}1 & 0 & . & . & . & 0\\ 0 & 1 & . & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & 0 & . & . & . & 1\end{vmatrix}=1\,,$$

e quindi

$$x'_1\,x'_1\ldots x'_\rho=x_1\,x_2\ldots x_\rho\,e_1\,e_2\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{M}\,.$$

3. È interessante di vedere come si esprime il prodotto $x_1\,x_2\ldots x_\rho$, cavato dalla (19) per mezzo del prodotto $x'_1\,x'_2\ldots x'_\rho$, e ciò può essere fatto in due modi distinti egualmente semplici.

Indicando con N la estensione subordinata che contiene gli elementi $x_1\,,x_2\,,\ldots,x_\rho$ sicchè sia $x_1\,x_2\ldots x_\rho\cdot\mathrm{N}=0$, e moltiplicando a dritta la (19) prima per $e_1\,e_2\ldots e_\sigma$ e poi per N, si avrà:

$$x'_1\,x'_2\ldots x'_\rho\,e_1\,e_1\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{M}=\alpha^{\rho-1}\cdot x_1\,x_2\,,\ldots x_\rho\,e_1\,e_2\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{M}\cdot e_1\,e_2\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{N}$$

$$=\alpha^{\rho-1}\sum(-1)^\mu\sum_{q=0}^{q=p}(x_{r_1}\,x_{r_2}\ldots x_{r_q}\,e_1\ldots\bar{e}_{i_{r_1}}\,\bar{e}_{i_{r_2}}\ldots\bar{e}_{i_{r_q}}\ldots e_\sigma\mathrm{M})\times$$

$$\times\,x_{\eta_1}\,x_{\eta_2}\ldots x_{\eta_p}\,e_{i_{r_1}}\,e_{i_{r_2}}\ldots e_{i_{r_q}}\cdot e_1\,e_2\ldots e_\sigma\cdot\mathrm{N}\,,$$

siccome risulta dal confronto con la (17) quando il Σ si intende esteso per ogni valore q a tutte le combinazioni di classe q di ϱ elementi, e si supponga che x_{r_0} debba significare l'assenza dell'elemento corrispondente x. Tenendo poi presente che il prodotto $x_{\eta_1}\,x_{\eta_2}\ldots x_{\eta_p}\,e_{r_1}\,e_{r_2}\ldots e_{r_q}$ per $e_1\,e_2\ldots e_\sigma$

è nullo, si rileva che nella precedente somma tutti i termini, eccetto $(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_1 x_2 \dots x_\rho$ sono nulli, e che perciò:

$$x'_1 x'_2 \dots x'_\rho\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} = \mathrm{L} x_1 x_2 \dots x_\rho\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} = [\text{per la (17)}] \text{ ad}$$

$$\alpha^\rho \sum (-1)^\mu \sum_{p=0}^{p=q} (x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_q}\, e_1 \bar{e}_{i_{r_1}} \bar{e}_{i_{r_2}} \dots \bar{e}_{i_{r_q}} \dots e_\sigma \mathrm{N})\, x_{\eta_1} x_{\eta_2} \dots x_{\eta_p}\, e_{i_{r_1}} e_{i_{r_2}} \dots e_{i_{r_q}},$$

che, a sua volta, è uguale ad $\alpha^\rho (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})\, x_1 x_2 \dots x_\rho$, perchè tutti i termini della doppia somma, i quali contengono, per $q \neq 0$, il fattore $(x_{r_1} x_{r_2} \dots x_{r_q}\, e_1 \dots \bar{e}_{i_{r_1}} \dots \bar{e}_{i_{r_2}} \dots \bar{e}_{i_{r_q}} \dots e_\sigma \mathrm{N})$ sono nulli. Avremo, dunque

$$x'_1 x'_2 \dots x'_\rho\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} = \alpha^\rho (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})\, x_1 x_2 \dots x_\rho,$$

e quindi, in fine

$$(19') \qquad x_1 x_2 \dots x_\rho = \frac{1}{(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})^\rho (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})}\, x'_1 x'_2 \dots x'_\rho\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N}.$$

L'altro modo di procedere consiste nel ricavare dalle (1) i valori delle $x_1, x_2, \dots, x_\rho$ per mezzo delle $x'_1, x'_2, \dots, x'_\rho$, e poi di moltiplicarli fra loro. Considerando la k^{ma} delle (1) si ha, tenendo presente la k^{ma} delle (3),

$$\begin{aligned} x'_k\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} &= (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})\, x_k\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} \\ &= (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M}) \left\{ \Sigma (-1)^{\sigma - i} (x_k e_1 \dots \bar{e}_i \dots e_\sigma \mathrm{N})\, e_i + \right. \\ &\qquad \left. + (-1)^\sigma (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})\, x_k \right\} \\ &= (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})\, x_k \quad \text{per essere nulli i numeri} \\ &\qquad (x_k e_1 \dots \bar{e}_1 \dots e_\sigma \mathrm{N}). \end{aligned}$$

Se ne ricava

$$x_k = \frac{1}{(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})}\, x'_k\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N},$$

e quindi

$$x_1 x_2 \dots x_\rho = \frac{1}{(e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{M})^\rho (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})^\rho} \cdot \prod_1^\rho x'_k\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N}.$$

Ora, per la (2) confrontata con le (1) quando al posto delle x si scrivano le x' ed al posto di M si scriva N, è

$$\prod_1^\rho x'_k\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \cdot \mathrm{N} = (e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N})^{\rho - 1}\, x'_1 x'_2 \dots x'_\rho\, e_1 e_2 \dots e_\sigma \mathrm{N};$$

dunque ecc.