ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Meccanica. — *Metodo diretto per risolvere, dati gli spostamenti in superficie, il problema dell'equilibrio dei corpi elastici omogenei ed isotropi.* Nota del dott. UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Scopo della presente Nota è mostrare che, dati gli spostamenti in superficie, il problema dell'equilibrio elastico dei corpi elastici omogenei ed isotropi, semplicemente connessi, può risolversi direttamente, senza, cioè, ricorrere a deformazioni ausiliarie, determinando direttamente la dilatazione cubica in superficie mediante una certa equazione integrale del Fredholm, di 2ª specie.

Consideriamo le equazioni indefinite dell'equilibrio elastico dei corpi elastici omogenei ed isotropi:

$$(1) \qquad \begin{cases} K\Delta^2 u + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial\xi} = \varrho X \\ K\Delta^2 v + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial\eta} = \varrho Y \\ K\Delta^2 w + (L+K)\dfrac{\partial\theta}{\partial\zeta} = \varrho Z \end{cases}$$

dove è ben noto il significato dei simboli. In particolare, u, v, w rappresentano le componenti dello spostamento.

Si tratta, dapprima, di determinare la dilatazione cubica

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta} + \frac{\partial w}{\partial\zeta},$$

dati gli spostamenti in superficie.

Moltiplichiamo le (1) per $\frac{1}{r}dS$ ed integriamo, poi, in tutto lo spazio S, avendo posto

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

dove x, y, z si riferiscono ad un punto *interno*, generico, e ξ, η, ζ sono le variabili d'integrazione.

Dopo avere osservato che

$$\int_S \frac{\Delta^2 u}{r} dS = g_1(x, y, z) - 4\pi u(x, y, z)$$

$$\int_S \frac{\Delta^2 v}{r} dS = g_2(x, y, z) - 4\pi v(x, y, z)$$

$$\int_S \frac{\Delta^2 w}{r} dS = g_3(x, y, z) - 4\pi w(x, y, z) \quad ,$$

dove g_1, g_2, g_3 sono funzioni note di x, y, z, supposta determinata l'ordinaria funzione di Green e

$$\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} dS = -\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma - \int_s \theta \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) dS =$$

$$= -\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial x}\int_s \frac{\theta}{r} dS\,,$$

$$\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \eta} dS = -\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\eta}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial y}\int_s \frac{\theta}{r} dS\,,$$

$$\int_s \frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} dS = -\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\zeta}\, d\sigma + \frac{\partial}{\partial z}\int_s \frac{\theta}{r} dS\,,$$

dove n rappresenta la nota normale, vôlta verso l'interno dello spazio S, otterremo

$$\left\{\begin{aligned}
&4\pi K u + (L+K)\left\{\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma - \frac{\partial}{\partial x}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = F_1(x, y, z)\\
&4\pi K v + (L+K)\left\{\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\eta}\, d\sigma - \frac{\partial}{\partial y}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = F_2(x, y, z)\\
&4\pi K w + (L+K)\left\{\int_\sigma \frac{\theta}{r}\cos\widehat{n\zeta}\, d\sigma - \frac{\partial}{\partial z}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = F_3(x, y, z)
\end{aligned}\right.$$

dove F_1, F_2, F_3 sono funzioni note di x, y, z.

Mediante derivazione, ottengo

$$\left\{\begin{aligned}
&4\pi K \frac{\partial u}{\partial x} - (L+K)\left\{\int_\sigma \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\cos\widehat{n\xi}\, d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = \frac{\partial F_1}{\partial x}\\
&4\pi K \frac{\partial v}{\partial y} - (L+K)\left\{\int_\sigma \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta}\cos\widehat{n\eta}\, d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = \frac{\partial F_2}{\partial y}\\
&4\pi K \frac{\partial w}{\partial z} - (L+K)\left\{\int_\sigma \theta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\cos\widehat{n\zeta}\, d\sigma + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = \frac{\partial F_3}{\partial z}.
\end{aligned}\right.$$

Talchè, sommando membro a membro, resulta

$$4\pi K\theta - (L+K)\left\{\int_\sigma \theta \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma + \Delta^2 \int_s \frac{\theta}{r} dS\right\} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,,$$

ovvero

$$4\pi K\theta - (L+K)\left\{\int_\sigma \theta \frac{d\frac{1}{r}}{dn} d\sigma - 4\pi\theta\right\} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,.$$

Da cui

$$(2)\qquad 4\pi(L+2K)\,\theta-(L+K)\int_\sigma \theta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma=F(x\,,y\,,z)\ ,$$

avendo posto

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)=F(x\,,y\,,z)\ .$$

E, facendo tendere il punto $(x\,,y\,,z)$ verso un punto del contorno, avrò, al limite,

$$4\pi(L+2K)\,\theta_0-(L+K)\lim\int_\sigma \theta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma=F_0\ .$$

Ma, come è noto dalla teoria del potenziale,

$$\lim\int_\sigma \theta\frac{d\frac{1}{r}}{dn}\,d\sigma=2\pi\,\theta_0+\int_\sigma \theta\frac{d\frac{1}{r_0}}{dn}\,d\sigma\ ;$$

talchè, in superficie, avremo

$$2\pi(L+3K)\,\theta_0-(L+K)\int_\sigma \theta\frac{d\frac{1}{r_0}}{dn}\,d\sigma=F_0\ ,$$

dove θ_0 rappresenta la θ in superficie, ed $F_0=\lim F$.

Da cui

$$\theta_0-\frac{L+K}{L+3K}\int_\sigma\frac{\theta}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dn}\,d\sigma=G_0\ ,$$

dove

$$G_0=\frac{F_0}{2\pi(L+3K)}\ .$$

Come si vede, la dilatazione cubica in superficie è soluzione dell'equazione integrale di 2ª specie

$$\Omega_0-\frac{L+K}{L+3K}\int_\sigma\frac{\Omega}{2\pi}\frac{d\frac{1}{r_0}}{dn}\,d\sigma=G_0\ ,$$

che può anche scriversi

$$(3)\qquad \Omega_0-\frac{L+K}{L+3K}\int_\sigma\frac{\cos\varphi}{2\pi r_0^2}\,\Omega\,d\sigma=G_0\ ,$$

dove è manifesto il significato dell'angolo φ.

L'equazione integrale (3) è del tipo

$$\Omega_0 + \beta \int_\sigma \frac{\cos\varphi}{2\pi r_0^2}\,\Omega\, d\sigma = \mathrm{H}_0\ ,$$

dove β rappresenta un parametro ausiliario indipendente. Il tipo in questione ha formato oggetto di studio da parte del sig. Plemelj [1]. La trattazione della (4) viene ricondotta a quella di un'equazione integrale, pure di 2ª specie, avente il nucleo finito dappertutto. Il sig. Plemelj ha dimostrato che, se il parametro β ha il valore assoluto inferiore ad 1, il parametro stesso non assume mai valori eccezionali (autovalori) [2]. Ora, nel nostro caso,

$$\frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{\mathrm{L}+3\mathrm{K}} = \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\ ,$$

essendo

$$\lambda = \frac{\varepsilon \mathrm{E}}{(1+\varepsilon)(1-2\varepsilon)}\ ,\quad \mu = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\varepsilon)}\ ,$$

dove ho indicato con E il modulo di Young e con ε il rapporto di Poisson.

La teoria dell'elasticità insegna che

$$\mu > 0\ ,\quad \lambda+\mu > 0\ .$$

Sarà, dunque,

$$\lambda + 3\mu > \lambda + \mu\ ,$$

e, perciò,

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} < 1\ .$$

Possiamo, dunque, affermare che $\frac{\mathrm{L}+\mathrm{K}}{\mathrm{L}+3\mathrm{K}}$ *non sarà mai un valore eccezionale.* E, perciò, *la soluzione della equazione integrale* (3) *sarà sempre unica.*

Supposta, dunque, ricavata dalla (3) la dilatazione cubica in superficie, la (2) fornirà, poi, immediatamente, la dilatazione cubica in un qualsiasi punto *interno* del corpo.

E, allora, ricordando le (1), la determinazione delle componenti di spostamento verrà a costituire un problema ben noto, che si sa immediatamente risolvere, prestabilite, naturalmente, le relative restrizioni, già implicitamente supposte, sulla natura della deformazione e sulla natura della superficie contorno del solido.

[1] Monatshefte für Mathematik und Physik, t. XV, t. XVIII.

[2] Ibid., t. XV, pag. 383.