ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota I del Corrispondente E. Almansi.

Matematica. — *Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier.* Nota di Giuditta Graziani, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

Meccanica. — *Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques.* Nota di N. Kryloff (ingénieur des mines), presentata dal Socio U. Dini.

Fisica matematica. — *Sopra un problema di dinamica degli elettroni.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio Volterra.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Su l'integrazione di alcune equazioni alle derivate parziali mediante funzioni di Bessel.* Nota di Filippo Sibirani, presentata dal Corrisp. C. Arzelà.

1. Ricordato che l'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+z=0$ ammette per integrale particolare, assumente il valore 1 sopra gli assi, una funzione di Bessel di prima specie e di ordine 0, stabilisco una formula che dà l'integrale generale dell'equazione $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+\mathrm{A}(x)\,\mathrm{B}(y)\,z=\mathrm{C}(x,y)$, conosciuto che sia un conveniente integrale particolare dell'equazione priva di secondo membro, che è ancora una funzione di Bessel.

Pure per mezzo delle funzioni di Bessel trovo l'integrale dell'equazione alle derivate parziali lineare a coefficienti costanti $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{2k} z}{\partial x^k\,\partial y^k}=0$ che si riduce, esso e le derivate $\frac{\partial^{2m} z}{\partial x^m\,\partial y^m}$ ad assegnate costanti sulle rette $x=\alpha$, $y=\beta$: stabilisco poi una formula che fornisce l'integrale generale dell'equazione $\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\partial^{2k} z}{\partial x^k\,\partial y^k}=\mathrm{K}(x,y)$ soddisfacente alle solite condizioni di Cauchy,

quando si sia trovato un integrale particolare dell'equazione precedente, che prende convenienti valori sulle rette $x=\alpha$, $y=\beta$, insieme colle derivate della forma $\frac{\partial^{2m} z}{\partial x^m \partial y^m}$.

2. L'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + z = 0 \tag{1}$$

ammette come integrale particolare, che sugli assi prende il valore 1, la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero $J^{(0)}(2\sqrt{xy})$, essendo

$$J^{(0)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{2^{2n}(n!)^2};$$

epperò $J^{(0)}(2\sqrt{(x-\alpha)(y-\beta)})$ è l'integrale della (1) che assume il valore 1 sulle rette $x=\alpha$, $y=\beta$.

Si abbia l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + A(x)\,B(y)\,z = C(x, y) \tag{2}$$

in cui si suppongono A, B, C funzioni continue, e si voglia la soluzione che per $x=x_0$ si riduce a $\varphi(y)$ e per $y=y_0$ a $\psi(x)$, supposto $\varphi(y_0) = \psi(x_0) = z_0$. Col porre

$$\begin{gathered} z = u + \varphi(y) + \psi(x) - z_0; \\ C(x, y) - A(x)\,B(y)\,[\varphi(y) + \psi(x) - z_0] = G(x, y) \end{gathered} \tag{3}$$

l'equazione diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A(x)\,B(y)\,u = G(x, y) \tag{4}$$

della quale basta trovare la soluzione che si annulla per $x=x_0$ e per $y=y_0$.

Se fosse $G(x, y) = 0$, l'unica soluzione della

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + A(x)\,B(y)\,u = 0 \tag{4'}$$

che si annulla per $x=x_0$ e per $y=y_0$ è $u=0$, onde supporremo $G(x, y) \neq 0$.

Ma della (4') ci interessa, pel seguito, trovare la soluzione che prende il valore 1 per $x=\alpha$ e per $y=\beta$. Se si osserva che

$$\frac{\partial^2 J^{(0)}(2\sqrt{w_1(x) \cdot w_2(y)})}{\partial x \partial y} = -J^{(0)}(2\sqrt{w_1(x) \cdot w_2(y)})\, w_1'(x) \cdot w_2'(y)$$

è chiaro che la cercata funzione è

$$J^{(0)}\left(2\left[\int_{\alpha}^{x} A(x)\,dx\,.\int_{\beta}^{y} B(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\right).$$

Orbene la soluzione della (4) annullantesi per $x = x_0$ e per $y = y_0$ è data da

$$(5)\qquad \bar{u}(x\,,y) = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} G(\alpha\,,\beta)\,J^{(0)}\left(2\left[\int_{\alpha}^{x} A(x)\,dx\,.\int_{\beta}^{y} B(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\right) d\beta$$

come ora proveremo.

A quest' uopo si osservi che se si ha la funzione

$$v(x\,,y) = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} G(\alpha\,,\beta)\,\theta(x\,,y\,,\alpha\,,\beta)\,d\beta\,,$$

ove $\theta(x, y, \alpha, \beta)$ è funzione continua rispetto ai quattro argomenti che contiene, si ha applicando la derivazione sotto il segno

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = &\int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} G(\alpha\,,\beta)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + \int_{x_0}^{x} G(\alpha\,,y)\,\frac{\partial\theta(x\,,y\,,\alpha\,,y)}{\partial x}\,d\alpha + \\ &+ \int_{y_0}^{y} G(x\,,\beta)\,\frac{\partial\theta(x\,,y\,,x\,,\beta)}{\partial y}\,d\beta + G(x\,,y)\,\theta(x\,,y\,,x\,,y) \end{aligned}$$

formula che si riduce a

$$(6')\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} G(\alpha\,,\beta)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + G(x\,,y)$$

se si ammette che θ prenda il valore 1 quando $x = \alpha$ per qualsivoglia y, e quando $y = \beta$ per qualsivoglia x.

La funzione $J^{(0)}\left(2\left[\int_{\alpha}^{x} A(x)\,dx\,.\int_{\beta}^{y} B(y)\,dy\right]^{\frac{1}{2}}\right)$ si comporta come la θ, sia per la continuità, che per i valori che essa assume per $x = \alpha$ e per $y = \beta$; di più soddisfa alla (4') onde

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x\,\partial y} + A(x)\,B(y)\,\bar{u} = G(x\,,y)$$

come si doveva provare; d'altra parte poi $\bar{u}$ si annulla per $x = x_0$ e per $y = y_0$.

3. Si abbia l'equazione

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + A(y)\,\frac{\partial z}{\partial x} + B(x)\,\frac{\partial z}{\partial y} + C(x\,,y)\,z + D(x\,,y) = 0$$

ove si suppone

$$(8)\qquad C(x\,,y) = A(y)\,B(x) + H(x)\,K(y)\,.$$

Se si pone

$$z = e^{-\int A dy - \int B dx} \zeta(x, y),$$

si sostituisce in (7) e si moltiplica per $e^{\int A dy + \int B dx}$, la (7) stessa diviene, tenendo conto della (8),

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} + H(x) K(y) \zeta + e^{\int A dy + \int B dx} D(x, y) = 0$$

che è del tipo (4).

Sia data l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} - \frac{n}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + A(x) B(y) z + C(x, y) z^n = 0 \tag{9}$$

con n numero qualsivoglia. Ponendo

$$\frac{z^{1-n}}{1-n} = \zeta$$

e sostituendo nella (9) nella quale si è diviso per z^n, si ha

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} + A(x) B(y) (1-n) \zeta + C(x, y) = 0$$

che è della forma (4).

4. Sia data l'equazione, a coefficienti costanti

$$\frac{\partial^{2n} z}{\partial x^n \, \partial y^n} + a_1 \frac{\partial^{2(n-1)} z}{\partial x^{n-1} \, \partial y^{n-1}} + a_2 \frac{\partial^{2(n-2)} z}{\partial x^{n-2} \, \partial y^{n-2}} + \cdots + a_n z = H(x, y) \tag{10}$$

di cui si voglia la soluzione che soddisfa alle condizioni

$$\left(\frac{\partial^{n-k} z}{\partial x^{n-k}}\right)_{x=x_0} = \varphi_k(y) \qquad \left(\frac{\partial^{n-k} z}{\partial y^{n-k}}\right)_{y=y_0} = \psi_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

supposto

$$\varphi_h^{(n-h)}(y_0) = \psi_h^{(n+h)}(x_0) \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Colla sostituzione

$$z = u + \sum_{s=0}^{n-1} \left[\varphi_{s+1}(y) - \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{s+1}^{(i)}(y_0) \frac{(y-y_0)^i}{i!} \right] \frac{(x-x_0)^{n-1-s}}{n-1-s!} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} \psi_{n-1}(x) \frac{(y-y_0)^i}{i!}$$

la (10) diviene

$$(12)\qquad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n\,\partial y^n}+a_1\frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{n-1}}+a_2\frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^{n-2}}+\cdots+a_n u=\mathrm{K}(x,y)$$

e la u deve soddisfare alle condizioni

$$(13)\qquad \left(\frac{\partial^r u}{\partial x^r}\right)_{x=x_0}=0\quad;\quad\left(\frac{\partial^r u}{\partial y^r}\right)_{y=y_0}=0\qquad(r=0,1,\ldots,n-1).$$

Risolviamo prima il problema di determinare la soluzione dell'equazione

$$(14)\qquad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n\,\partial y^n}+a_1\frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{n-1}}+a_2\frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^{n-2}}+\cdots+a_n u=0$$

soddisfacente alle condizioni

$$(15)\qquad \frac{\partial^{2m}u}{\partial x^m\,\partial y^m}=\mathrm{M}_m\qquad(m=0,1,2,\ldots,n-1)$$

per $x=\alpha$ e per $y=\beta$, i M_m essendo numeri prefissati [1].

È facile verificare che $\mathrm{J}^{(0)}\left(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)}\right)$ soddisfa all'equazione (14) se θ soddisfa all'equazione

$$(16)\qquad (-1)^n\theta^n+(-1)^{n-1}a_1\theta^{n-1}+\cdots-a_{n-1}\theta+a_n=0.$$

Supposte le radici θ_r tutte diverse, la funzione $\sum_{r=1}^{n}\mathrm{A}_r u_r$ ove si pone

$$u_r=\mathrm{J}^{(0)}\left(2\sqrt{\theta_r(x-\alpha)(y-\beta)}\right)$$

soddisfa alla (14) e poichè

$$\left(\frac{\partial^{2s}u_r}{\partial x^s\,\partial y^s}\right)_{x=\alpha}=\left(\frac{\partial^{2s}u_r}{\partial x^s\,\partial y^s}\right)_{y=\beta}=(-1)^s\theta_r^s$$

soddisferà anche alle condizioni (15) se i nnmeri A_r sono scelti in modo da soddisfare al sistema normale

$$(17)\qquad \mathrm{A}_1\theta_1^s+\mathrm{A}_2\theta_2^s+\cdots+\mathrm{A}_n\theta_n^s=(-1)^s\mathrm{M}_s\qquad(s=0,1,\ldots,n-1).$$

Se l'equazione (16) ha radici multiple, il sistema (17) non è normale ed allora bisogna procedere in altro modo.

Sia $\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_p$ e $\theta_r\neq\theta_p$ per $r>p$. Intanto si ha identicamente

$$(18)\qquad \frac{\partial^{2n}u}{\partial x^n\,\partial y^n}+a_1\frac{\partial^{2(n-1)}u}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{n-1}}+a_2\frac{\partial^{2(n-2)}u}{\partial x^{n-2}\,\partial y^{n-2}}+\cdots+a_n u=\mathrm{F}(\theta)\,u$$

[1] È ovvio osservare che non sono le solite condizioni di Cauchy.

avendo posto $u = J^{(0)}\left(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)}\right)$ e indicando con $F(\theta)$ il primo membro della (16).

Se deriviamo la (18) sispetto a θ una volta, poi una seconda volta e così di seguito fino a $p-1$ volte si ottengono $p-1$ equazioni che sono soddisfatte se θ è la radice d'ordine di multiplicità p della (16), giacchè i secondi membri contengono linearmente la F e le derivate successive che saranno nulle per la nota proprietà delle radici multiple. Ciò fa vedere che saranno soluzioni della (14) le p funzioni

$$(19)\qquad \begin{gathered} u_1 = J^{(0)}\left(2\sqrt{\theta(x-\alpha)(y-\beta)}\right),\ u_2 = \frac{du_1}{d\theta}, \\ u_3 = \frac{d^2u_1}{d\theta^2},\ \dots,\ u_p = \frac{d^{p-1}u_1}{d\theta^{p-1}} \end{gathered}$$

insieme con le $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_n$ del caso precedente. Allora se si prendono i numeri A soddisfacenti al sistema normale [1]

$$\begin{gathered} A_1 D_{s,0}\theta_1^s + A_2 D_{s,1}\theta_1^{s-1} + A_3 D_{s,2}\theta_1^{s-2} + \cdots + A_p D_{s,p-1}\theta^{s-p+1} + \\ + A_{p+1}\theta_{p+1}^s + A_{p+2}\theta_{p+2}^s + \cdots + A_n\theta_n^s = (-1)^s M_s \\ (s = 0, 1, \dots, n-1), \end{gathered}$$

dove θ_i innalzato ad esponente negativo dev'essere rimpiazzato dallo zero e dove si indica con $D_{s,r}$ il prodotto di r fattori decrescenti a cominciare da s, la $\sum_{r=1}^{n} A_r u_r$ è la soluzione della (14) che soddisfa alle condizioni (15).

Osserviamo che nelle (19) le funzioni $u_2, u_3, \dots, u_p$ possono esprimersi per le funzioni di Bessel di ordine superiore allo zero dell'argomento $2\sqrt{\theta_1(x-\alpha)(x-\beta)}$, mediante le formule note della teoria delle funzioni cilindriche:

$$\frac{dJ^{(0)}(z)}{dz} = -J^{(1)}(z)\ ;\ \frac{dJ^{(n)}(z)}{dz} = \frac{1}{2}\left[J^{(n-1)}(z) - J^{(n+1)}(z)\right] \text{ per } n > 0.$$

Si sia ora determinata la soluzione $U((x-\alpha)(y-\beta))$ di (14) soddisfacente alle condizioni

$$(20)\qquad \frac{\partial^{2m}U}{\partial x^m\,\partial y^m} = 0\ (m = 0, 1, \dots, n-2)\ ;\ \frac{\partial^{2(n-1)}U}{\partial x^{n-1}\,\partial y^{n-1}} = 1$$

per $x = \alpha$ e per $y = \beta$. Allora la funzione

$$(21)\qquad u = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} K(\alpha, \beta)\, U((x-\alpha)(y-\beta))\, d\beta$$

soddisfa all'equazione (2) e alle condizioni ai limiti (13).

[1] La normalità del sistema risulta dallo sviluppo del determinante dei coefficienti che io ho dato nella Nota *Un determinante affine a quello di Wandermonde*: Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dicembre 1905.

Per veder ciò, basta osservare che per le formule (6) e (20) si ha

$$\frac{\partial^{2(n-k)} u}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{n-k}} = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} \mathrm{K}(\alpha\,,\beta)\,\frac{\partial^{2(n-k)}\mathrm{U}}{\partial x^{n-k}\,\partial y^{n-k}}\,d\beta \qquad (k=1\,,2\,,\ldots.\,n)$$

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{n}\,\partial y^{n}} = \int_{x_0}^{x} d\alpha \int_{y_0}^{y} \mathrm{K}(\alpha\,,\beta)\,\frac{\partial^{2n}\mathrm{U}}{\partial x^{n}\,\partial y^{n}}\,d\beta + \mathrm{K}(x\,,y)$$

e sostituire nella (12).

5. È facile vedere che il sistema

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 z_r}{\partial x\,\partial y} + a_{r1} z + a_{r2} z_2 + \cdots + a_{rn} z_n = \chi_r(x\,,y) \qquad (r=1\,,2\,,\ldots,n)$$

si può ricondurre a successive integrazioni di equazioni del tipo (12).

Anche sistemi di ordine più elevato possono, con opportune sostituzioni, trasformarsi in sistemi del secondo ordine di un maggior numero di equazioni del tipo (22); epperò essi pure saranno integrabili per mezzo delle funzioni di Bessel.

6. Diamo alcune relazioni funzionali a cui soddisfa la funzione $\mathrm{J}^{(0)}(uv)$ deducendole da risultati ottenuti nei paragrafi precedenti.

Se è data l'equazione

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + xyz + \operatorname{sen}(x\,.\,y) = 0$$

l'integrale che assume sugli assi il valore 1 è, giusta la formula (5),

$$z = 1 - \int_0^x d\alpha \int_0^y [\alpha\beta + \operatorname{sen}(\alpha\,.\,\beta)]\,\mathrm{J}^{(0)}\left(\sqrt{(x^2-\alpha^2)\,(y^2-\beta^2)}\right) d\beta.$$

Ma, d'altra parte, soddisfa all'equazione anche la funzione $\cos(x\,.\,y)$ ed essa pure si riduce ad 1 sugli assi, onde possiamo asserire che

$$\cos(x\,.\,y) = 1 - \int_0^x d\alpha \int_0^y [\alpha\beta + \operatorname{sen}(\alpha\,.\,\beta)]\,\mathrm{J}^{(0)}\left(\sqrt{(x^2-\alpha^2)\,(y^2-\beta^2)}\right) d\beta$$

poichè unica è la soluzione della (23) che assume sugli assi valori prefissati.

Questa relazione può anche essere scritta:

$$\cos(x\,.\,y) = \mathrm{J}^{(0)}(x\,.\,y) - \int_0^x u\,du \int_0^y \frac{\operatorname{sen}\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}{\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}\,\mathrm{J}^{(0)}(u\,.\,v)\,v\,dv.$$

Con procedimento analogo si trova:

$$\operatorname{sen}(x\,.\,y) = \int_0^x u\,du \int_0^y \frac{\cos\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}{\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}\,\mathrm{J}^{(0)}(u\,.\,v)\,v\,dv$$

$$e^{xy} = \mathrm{J}^{(0)}(ixy) + \int_0^x u\,du \int_0^y \frac{e^{\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}}{\sqrt{(x^2-u^2)\,(y^2-v^2)}}\,\mathrm{J}^{(0)}(iuv)\,v\,dv.$$