ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 dicembre 1909.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.* Nota del Socio Vito Volterra.

1. Nel caso della isotropia è facile vedere la forma che assumono le equazioni della ereditarietà per i corpi elastici. Riferendosi alle equazioni (III) della mia Nota: *Equazioni integro-differenziali della teoria dell'elasticità* (1) si avrà che le equazioni stesse non debbono alterarsi cambiando verso a ciascuno degli assi coordinati. Osservando i cambiamenti di segno che in tal modo vengono ad assumere le t_{rs} e le γ_{rs}, si vede subito quali sono i termini che debbono eliminarsi nei secondi membri delle (III). Ma queste equazioni non debbono alterarsi scambiando gli assi fra loro, quindi dovremo avere

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
t_{rr} &= \mathrm{L}\theta(t) + 2\mathrm{K}\gamma_{rr}(t) + \int_{t_0}^{t} (\varphi(t\,,\tau)\,\theta(\tau) + 2\psi(t\,,\tau)\,\gamma_{rr}(\tau))\,d\tau\\
t_{rs} &= h\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \chi(t\,,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \quad r \gtrless s\\
\theta &= \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}\,.
\end{aligned}
$$

Dando ora agli assi una orientazione arbitraria, le equazioni debbono pure rimanere inalterate, e di qui si conclude che $\mathrm{K} = h\,, \psi = \chi$, e perciò

$$
(2)\qquad t_{rs} = \mathrm{K}\gamma_{rs}(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t\,,\tau)\,\gamma_{rs}(\tau)\,d\tau\,, \quad r \gtrless s \ (^2)\,.
$$

(1) Rend. della R. Acc. dei Lincei, seduta del 7 novembre 1909.

(2) Cfr. Boltzmann, *Zur theorie der elastischen Nachwirkung.* Pogg. Ann. Erg. Bd. 7, S. 624, 1876.

Nel caso delle omogeneità (che noi appunto considereremo) L e K saranno costanti e φ e ψ indipendenti da x, y, z. Ammetteremo L e K dello stesso segno.

Le equazioni integro-differenziali nelle componenti degli spostamenti u, v, w resulteranno quindi

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{K}\Delta^2 u(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial x} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 u(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial x}\right] d\tau = \varrho\mathrm{X}(t) \\ \mathrm{K}\Delta^2 v(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial y} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 v(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial y}\right] d\tau = \varrho\mathrm{Y}(t) \\ \mathrm{K}\Delta^2 w(t) + (\mathrm{L}+\mathrm{K})\dfrac{\partial\theta(t)}{\partial z} + \\ \qquad + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\left[\psi(t,\tau)\,\Delta^2 w(\tau) + (\varphi(t,\tau)+\psi(t,\tau))\,\frac{\partial\theta(\tau)}{\partial z}\right] d\tau = \varrho\mathrm{Z}(t)\,. \end{cases}$$

2. Dalle equazioni precedenti segue facilmente

$$(4)\quad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,\Delta^2\theta(t) + \int_{t_0}^{t}(\varphi(t,\tau)+2\psi(t,\tau))\,\Delta^2\theta(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial z},$$

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{K}\Delta^2\varpi_1(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_1(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial y} - \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial z} \\ \mathrm{K}\Delta^2\varpi_2(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_2(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial z} - \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial x} \\ \mathrm{K}\Delta^2\varpi_3(t) + \displaystyle\int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,\Delta^2\varpi_3(\tau)\,d\tau = \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial x} - \frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial y} \end{cases}$$

ove

$$\varpi_1 = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\quad,\quad \varpi_2 = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\quad,\quad \varpi_3 = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Quindi, mediante la risoluzione di equazioni integrali, potremo calcolare $\Delta^2\theta(t)$, $\Delta^2\varpi_1(t)$, $\Delta^2\varpi_2(t)$, $\Delta^2\varpi_3(t)$.

3. Per esprimere con semplicità la risoluzione di queste equazioni integrali e di altre analoghe, che avremo occasione di considerare in seguito, rappresentiamo l'operazione con cui si passa dalla f alla φ

$$(6)\quad \mathrm{K}f(t) + \int_{t_0}^{t}\psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$$

mediante

$$(\mathrm{I})\quad \varphi = \mathbf{A}_1 f$$

e inversamente scriviamo

$$(\mathrm{I}') \qquad f = \mathrm{A}_1^{-1}\varphi\,.$$

Quest' ultima operazione consiste nella risoluzione della equazione integrale precedente, la quale si fa colle regole note che ho dato nei miei lavori sulla risoluzione delle equazioni integrali.

Analogamente l'operazione corrispondente a

$$(7) \qquad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,f(t) + \int_{t_0}^{t} [\varphi(t\,,\tau) + 2\psi(t\,,\tau)]\,f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$$

denotiamola con A_2, cioè scriviamo

$$(\mathrm{II}) \qquad \varphi = \mathrm{A}_2 f \quad , \quad f = \mathrm{A}_2^{-1}\varphi\,.$$

4. Le (4) e (5) allora si scriveranno

$$(4') \qquad \mathrm{A}_2\Delta^2\theta = \frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial z}$$

$$(5') \qquad \begin{cases} \mathrm{A}_1\Delta^2\varpi_1 = \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial y} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial z} \\ \mathrm{A}_1\Delta^2\varpi_2 = \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial z} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial x} \\ \mathrm{A}_1\Delta^2\varpi_3 = \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial x} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial y} \end{cases}$$

e quindi

$$(4'') \qquad \Delta^2\theta = \mathrm{A}_2^{-1}\left(\frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial z}\right)$$

$$(5'') \qquad \begin{cases} \Delta^2\varpi_1 = \mathrm{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial y} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial z}\right) \\ \Delta^2\varpi_2 = \mathrm{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial z} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial x}\right) \\ \Delta^2\varpi_3 = \mathrm{A}_1^{-1}\left(\dfrac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial x} - \dfrac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Dalle (3) segue

$$\mathrm{K}\Delta^4 u(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t\,,\tau)\,\Delta^4 u(\tau)\,d\tau = \Delta^2(\varrho\mathrm{X}) -$$

$$- (\mathrm{L}+\mathrm{K})\,\frac{\partial\Delta^2\theta(t)}{\partial x} - \int_{t_0}^{t} (\varphi(t\,,\tau) + \psi(t\,,\tau))\,\frac{\partial\Delta^2\theta(\tau)}{\partial x}\,d\tau$$

ossia

$$\mathrm{A}_1\Delta^4 u = \Delta^2(\varrho\mathrm{X}) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varrho\mathrm{X})}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Y})}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho\mathrm{Z})}{\partial z}\right) + \mathrm{A}_1\,\frac{\partial\Delta^2\theta}{\partial x}$$

e come questa se ne hanno altre due analoghe. Da esse, tenendo conto della (4''), segue

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\Delta^4 u &= A_1^{-1}\Delta^2(\varrho X) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right)\\
\Delta^4 v &= A_1^{-1}\Delta^2(\varrho Y) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right)\\
\Delta^4 w &= A_1^{-1}\Delta^2(\varrho Z) + (A_2^{-1} - A_1^{-1})\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(\varrho X)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho Y)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho Z)}{\partial z}\right).
\end{aligned}\right.
$$

È dunque possibile trasformare le equazioni integro-differenziali (3) nelle equazioni differenziali precedenti in cui i secondi membri sono funzioni note.

Nel caso in cui manchino le forze di massa, le (4''), (5''), (8) si riducono a

$$\Delta^2\theta = \Delta^2\varpi_1 = \Delta^2\varpi_2 = \Delta^2\varpi_3 = \Delta^4 u = \Delta^4 v = \Delta^4 w = 0\,.$$

Sotto un certo aspetto quindi la forma integro-differenziale delle equazioni dell'elasticità nel caso ereditario non è che apparente, quando si tratta di corpi isotropi. Le condizioni che legano fra loro le $u\,,v\,,w$ conservano però sempre la forma integro-differenziale e così pure le condizioni al contorno, quando si suppongono date le tensioni.

5. Le relazioni corrispondenti alle (1) e (2) per le equazioni *aggiunte* saranno

$$(1')\qquad t'_{rr} = L\theta'(t) + 2K\gamma'_{rr}(t) + \int_t^T (\varphi(\tau\,,t)\,\theta'(\tau) + 2\psi(\tau\,,t)\,\gamma'_{rr}(\tau))\,d\tau$$

$$(2')\qquad t'_{rs} = K\gamma_{rs}(t) + \int_t^T \psi(\tau\,,t)\,\gamma'_{rs}(\tau)\,d\tau\,,\quad r \gtrless s$$

e le *equazioni aggiunte* resulteranno, posto $\theta' = \gamma'_{11} + \gamma'_{22} + \gamma'_{33}$,

$$
(3')\qquad \left\{
\begin{aligned}
&K\Delta^2 u'(t) + (L + K)\,\frac{\partial\theta'(t)}{\partial x} +\\
&\qquad + \int_t^T\left(\psi(\tau\,,t)\,\Delta^2 u'(\tau) + (\varphi(\tau\,,t) + \psi(\tau\,,t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial x}\right)d\tau = \varrho X'\\
&K\Delta^2 v'(t) + (L + K)\,\frac{\partial\theta'(t)}{\partial y} +\\
&\qquad + \int_t^T\left(\psi(\tau\,,t)\,\Delta^2 v'(\tau) + (\varphi(\tau\,,t) + \psi(\tau\,,t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial y}\right)d\tau = \varrho Y'\\
&K\Delta^2 w'(t) + (L + K)\,\frac{\partial\theta'(t)}{\partial z} +\\
&\qquad + \int_t^T\left(\psi(\tau\,,t)\,\Delta^2 w'(t) + (\varphi(\tau\,,t) + \psi(\tau\,,t))\,\frac{\partial\theta'(\tau)}{\partial z}\right)d\tau = \varrho Z'\,.
\end{aligned}\right.
$$

Se si suppongono nulle X', Y', Z', resulterà evidentemente, anche per le equazioni aggiunte,

$$\Delta^2\theta' = \Delta^2\varpi'_1 = \Delta^2\varpi'_2 = \Delta^2\varpi'_3 = \Delta^4 u' = \Delta^4 v' = \Delta^4 w' = 0$$

in cui

$$\varpi'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \;,\quad \varpi'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \;,\quad \varpi'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \,.$$

6. Sempre supponendo $X' = Y' = Z' = 0$, avremo immediatamente delle soluzioni particolari delle (3')

1°) Se F è armonica, avremo la soluzione

$$(9)\qquad u' = \frac{\partial F}{\partial x} \;,\quad v' = \frac{\partial F}{\partial y} \;,\quad w' = \frac{\partial F}{\partial z} \;;$$

2°) Se F_1, F_2, F_3 sono armoniche potrà ottenersi la soluzione

$$(10)\qquad u' = \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \;,\quad v' = \frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \;,\quad w' = \frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \;;$$

3°) Se Φ_1, Φ_2, Φ_3 sono biarmoniche e le tre derivate parziali di

$$\Delta^2\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right)$$

rispetto ad x, y, z sono indipendenti da t, vi sarà la soluzione

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= \alpha(T, t)\, \Delta^2\Phi_1 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \\ v &= \alpha(T, t)\, \Delta^2\Phi_2 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \\ w &= \alpha(T, t)\, \Delta^2\Phi_3 + \beta(T, t) \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}\right) \end{aligned}\right.$$

quando si prendano α e β tali che sia soddisfatta la condizione integrale

$$(12)\qquad (L + 2K)\,\beta(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + 2\psi(\tau, t)]\, \beta(T, \tau)\, d\tau +$$
$$+ (L + K)\,\alpha(T, t) + \int_t^T [\varphi(\tau, t) + \psi(\tau, t)]\, \alpha(T, t)\, d\tau = 0.$$

7. Prendiamo ora $F = \frac{1}{r}$, in cui r denota la distanza di un polo O, di coordinate ξ, η, ζ, dal punto generico x, y, z e consideriamo le (9) come soluzioni delle equazioni aggiunte con i secondi membri nulli. Le γ'_{rs} sa-

ranno indipendenti da t, e sarà $\theta' = 0$, quindi avremo

$$u' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}$$

$$t'_{11} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad t'_{22} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2}, \quad t'_{33} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}$$

$$t'_{23} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\,\partial z}, \quad t'_{31} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\,\partial x}, \quad t'_{12} = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\mathrm{X}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \mathrm{Y}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \mathrm{Z}'_\sigma = 2\mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z},$$

in cui si è posto

$$\mathrm{M}(\mathrm{T}, t) = \mathrm{K} + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, d\tau.$$

Queste formule differiscono da quelle che si hanno impiegando la prima soluzione ausiliaria del Betti, in quanto che alla costante K è sostituita M che è funzione di T e t.

Applicando la formula (1) della Nota precedente ed escludendo il polo O, interno ad S, mediante una sfera avente il centro O, facendo infine tendere indefinitamente a zero il raggio della sfera, si trova al limite

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma(t)\, u' d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X}(t)\, u' d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma\, u(t)\, d\sigma \right\} dt$$
$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \left\{ \frac{16}{3}\pi \mathrm{M}(\mathrm{T}, t)\, \theta(\xi, \eta, \zeta, t) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\pi (t_{11}(\xi, \eta, \zeta, t) + t_{22}(\xi, \eta, \zeta, t) + t_{33}(\xi, \eta, \zeta, t)) \right\} dt.$$

Derivando ambo i membri rispetto a T, con facili trasformazioni di integrali, si ha

$$\text{(13)} \qquad \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{A}_1 u \,.\, \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma = 4\pi\, \mathrm{A}_2\, \theta$$

o anche

$$\text{(13')} \qquad \int_\sigma \Sigma \mathbf{A}_2^{-1} \mathrm{X}_\sigma \,.\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \mathbf{A}_2^{-1}(\varrho \mathrm{X}) \,.\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\mathrm{S} -$$
$$- \int_\sigma \Sigma \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{A}_1 u \,.\, \frac{d}{dn}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} d\sigma = 4\pi\theta.$$

8. Se nelle (10) prendiamo $F_1 = \frac{1}{r}$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, con procedimento del tutto analogo, si giunge alla formula

$$\begin{aligned}(14)\quad & \int_\sigma \left(Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma + \int_S \left(\varrho Z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \varrho Y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS - \\ & \qquad - \int_\sigma \Bigg\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) \mathbf{A}_1 u + \\ & + \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) \mathbf{A}_1 v + \\ & + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) \mathbf{A}_1 w \Bigg\} d\sigma = \\ & \qquad = 4\pi \mathbf{A}_1 \varpi_1(\xi, \eta, \zeta, t),\end{aligned}$$

che si trasforma nell'altra

$$\begin{aligned}(14')\quad & \int_\sigma \left(\mathbf{A}_1^{-1} Z_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1} Y_\sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\sigma + \int_S \left(\mathbf{A}_1^{-1}(\varrho Z) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \mathbf{A}_1^{-1}(\varrho Y) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dS - \\ & \qquad - \int_\sigma \Bigg\{ \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nz - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos ny \right) u + \\ & + \left(- \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z\, \partial x} \cos nx - 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos ny + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos nz \right) v + \\ & + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial x} \cos nx + \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} \right) \cos ny + 2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y\, \partial z} \cos nz \right) w \Bigg\} d\sigma = \\ & \qquad = 4\pi \varpi_1(\xi, \eta, \zeta, t).\end{aligned}$$

Come questa formula se ne hanno altre due analoghe.

9. Confrontando le varie formule che abbiamo ora trovate colle ordinarie *equazioni del Betti* [1] relative all'equilibrio elastico, troviamo che esse hanno la stessa forma di queste, soltanto le componenti degli spostamenti, delle rotazioni, delle forze e la dilatazione vanno nelle prime assoggettate alle operazioni funzionali $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ o alle loro inverse. Bastano dunque le ordinarie formule del Betti in unione con queste operazioni funzionali

[1] E. Betti, *Teoria della elasticità*. Nuovo Cimento, 1872-73.

per trattare le equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.

Chiamiamo $\mathbf{A}_1 u$, $\mathbf{A}_1 v$, $\mathbf{A}_1 w$; $\mathbf{A}_1\varpi_1$, $\mathbf{A}_1\varpi_2$, $\mathbf{A}_1\varpi_3$; $\mathbf{A}_2\theta$ respettivamente gli *pseudospostamenti*, le *pseudorotazioni* e la *pseudodilatazione*, allora la (13), la (14) e le sue analoghe potranno interpretarsi mediante il teorema: *Per passare dal caso della non ereditarietà a quello della ereditarietà, nel caso di corpi solidi elastici isotropi, basterà sostituire nelle formule del Betti, relative all'equilibrio elastico, agli spostamenti, alle rotazioni ed alla dilatazione, respettivamente gli pseudospostamenti, le pseudorotazioni e la pseudodilatazione.*

10. Prendiamo nelle formule (11), analogamente a quanto fa il Somigliana [1], nel caso non ereditario,

$$\Phi_1 = \frac{r}{2} \quad , \quad \Phi_2 = 0 \quad , \quad \Phi_3 = 0 ,$$

otterremo allora

$$u' = \alpha \frac{1}{r} + \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \quad , \quad v' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} \quad , \quad w' = \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z}$$

e se scegliamo $\alpha(\mathrm{T}, t)$ in modo che

$$\mathrm{K}\alpha(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \alpha(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau = 1 \tag{15}$$

e poniamo

$$\mathrm{N}(\mathrm{T}, t) = \mathrm{K}\beta(\mathrm{T}, t) + \int_t^{\mathrm{T}} \psi(\tau, t)\, \beta(\mathrm{T}, \tau)\, d\tau . \tag{16}$$

avremo

$$\mathrm{X}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nx \right)$$

$$\mathrm{Y}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial y} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos ny \right)$$

$$\mathrm{Z}'_\sigma = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz + \mathrm{N}(\mathrm{T}, t) \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 r}{\partial x \, \partial z} - 2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} \cos nz \right) .$$

Ciò premesso applichiamo la (1) della Nota precedente e, come di solito, escludiamo il polo O con una sfera il cui raggio si faccia tendere a zero indefinitamente. Al limite avremo:

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X} u' d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u \, d\sigma \right\} = -4\pi \int_{t_0}^{\mathrm{T}} u(\xi, \eta, \zeta, t)\, dt ,$$

[1] Somigliana, *Sulle equazioni dell'elasticità*. Annali di Matematica, ser. II, t. XVI.

e derivando rispetto a T,

$$(17)\qquad -4\pi u(\xi,\eta,\zeta,\mathrm{T}) =$$

$$= \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} dt \left\{ \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u' d\sigma + \int_{\mathrm{S}} \Sigma \varrho \mathrm{X} u' d\mathrm{S} - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}'_\sigma u d\sigma \right\}.$$

11. Riprendiamo ora l'equazione (6), moltiplichiamone ambo i membri per $\alpha(\mathrm{T},t)$ e integriamo fra t_0 e T. Con ben note trasformazioni, e tenendo conto della (15), si avrà

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt =$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T},t)\,f(t)\,dt + \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,dt \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t) \left\{ \mathrm{K}\alpha(\mathrm{T},t) + \int_t^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},\tau)\,\psi(\tau,t)\,d\tau \right\} dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} f(t)\,dt,$$

quindi derivando e tenendo presente la (I')

$$(18)\qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = f(\mathrm{T}) = \mathbf{A}_1^{-1}\varphi(\mathrm{T}).$$

Ma dalla (12) segue, tenendo conto della (15),

$$(15')\qquad (\mathrm{L}+2\mathrm{K})\,(\alpha(\mathrm{T},t)+\beta(\mathrm{T},t)) +$$

$$+ \int_t^{\mathrm{T}} (\varphi(\tau,t)+2\psi(\tau,t))\,(\alpha(\mathrm{T},\tau)+\beta(\mathrm{T},\tau))\,d\tau = 1,$$

dunque, seguendo un procedimento analogo a quello ora impiegato e servendosi della notazione (II), potremo scrivere

$$\frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} (\alpha(\mathrm{T},t)+\beta(\mathrm{T},t))\,\varphi(t)\,dt = \mathbf{A}_2^{-1}\varphi(\mathrm{T}),$$

d'onde per la (18)

$$(18')\qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1}-\mathbf{A}_1^{-1})\,\varphi(\mathrm{T}).$$

Dalle (16) e (6) poi segue

$$\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T},t)\,f(t)\,dt = \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t) \left\{ \mathrm{K}f(t) + \int_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)\,f(\tau)\,d\tau \right\} dt$$

$$= \int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt,$$

quindi applicando la (18') e la (I)

$$(18'')\qquad \frac{d}{d\mathrm{T}}\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T},t)\,\varphi(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1}-\mathbf{A}_1^{-1})\,\mathbf{A}_1 f(t) =$$

$$= \mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 f(t) - f(t) = (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,f(t).$$

Riassumendo le formule (18), (18'), (18'') si ha dunque

$$\text{(III)}\quad \begin{cases} \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \alpha(\mathrm{T}\,,t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = \mathbf{A}_1^{-1}\mathrm{F}(\mathrm{T}) \\ \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \beta(\mathrm{T}\,,t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathrm{F}(\mathrm{T}) \\ \dfrac{d}{d\mathrm{T}}\displaystyle\int_{t_0}^{\mathrm{T}} \mathrm{N}(\mathrm{T}\,,t)\,\mathrm{F}(t)\,dt = (\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,\mathrm{F}(\mathrm{T}) \end{cases}$$

in cui $\mathrm{F}(t)$ è una funzione arbitraria.

12. Possiamo ora applicare le (III) per eseguire le derivate rispetto a T che compariscono nella formula (17), e questa allora si scriverà

$$\text{(17')}\quad -4\pi u(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t) = \int_\sigma \left\{ \frac{1}{r}\mathbf{A}_1^{-1}\mathrm{X}_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathrm{X}_\sigma + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathrm{Y}_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})\,\mathrm{Z}_\sigma \right\} d\sigma +$$
$$+ \int_{\mathrm{S}} \left\{ \frac{1}{r}\mathbf{A}_1^{-1}(\varrho\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{X}) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{Y}) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z}(\mathbf{A}_2^{-1} - \mathbf{A}_1^{-1})(\varrho\mathrm{Z}) \right\} d\mathrm{S} -$$
$$- \int_\sigma \left\{ \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} u + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nx \right)(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,u + \right.$$
$$+ \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny \right) v + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial y} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny \right)(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,v +$$
$$+ \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\cos nx - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos ny \right) w +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 r}{\partial x\,\partial z} - 2\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\cos nz \right)(\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{A}_1 - 1)\,w \right\} d\sigma\,.$$

Come la formula precedente ci dà u, così possono ottenersi altre due formule che esprimono analogamente v e w. Si vede dunque che il caso ereditario della elasticità può trattarsi pur lasciando completamente indeterminate le funzioni $\varphi(t\,,\tau)$, $\psi(t\,,\tau)$ ed a questo proposito può ripetersi quando avemmo occasione già di dire nel caso della elettrodinamica [1].

Fisica matematica. — *Sopra un'estensione della teoria dell'elasticità.* Nota del Socio CARLO SOMIGLIANA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

[1] *Sulle equaz. della elettrodinamica.* § 3, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XVIII.