ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

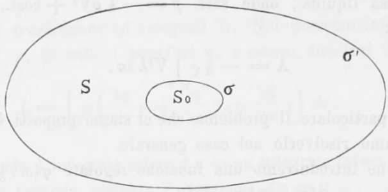
PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Meccanica. — *Azione esercitata da una massa liquida in moto sopra un corpo fisso.* Nota I del Corrispondente E. ALMANSI.

1. Una massa liquida M, di densità ϱ, occupa interamente lo spazio S compreso fra la superficie σ di un solido immobile S_0, ed un altra superficie chiusa, pure fissa, σ'.

La massa M è supposta in movimento. Su tale movimento non faremo alcuna ipotesi restrittiva: così non escluderemo l'esistenza di vortici, nè di superficie su cui la velocità sia discontinua.



Ammetteremo che sugli elementi di M non agiscano forze di massa.

Noi vogliamo esaminare l'azione esercitata dalla massa liquida sul corpo S_0. Perciò, detta p la pressione in un punto qualunque di M, prenderemo a considerare la quantità

$$A = \int_\sigma p\lambda d\sigma\,, \tag{1}$$

ove λ rappresenti una funzione nota, definita nei punti di σ, che soddisfi la condizione

$$\int_\sigma \lambda d\sigma = 0\,. \tag{2}$$

Riferiti i punti dello spazio ad un sistema di assi fissi $(x\,y\,z)$, e detti α, β, γ i coseni direttori della normale a σ che penetra in S, facendo λ successivamente uguale a

$$-\alpha\,, \quad -\beta\,, \quad -\gamma\,,$$
$$-\gamma y + \beta z\,, \quad -\alpha z + \gamma x\,, \quad -\beta x + \alpha y\,,$$

i corrispondenti valori di A ci daranno le componenti della forza e della coppia resultanti delle pressioni $pd\sigma$ esercitate dalla massa liquida in moto sugli elementi di σ.

Quello che noi precisamente ci proponiamo si è trovare un'espressione di A in cui, oltre a quantità indipendenti dal movimento di M, figurino solo le componenti u, v, w delle velocità delle particelle liquide; non, dunque, la pressione p, nè le derivate di u, v, w rispetto al tempo: in modo che, conoscendo *al tempo t* il movimento della massa liquida (velocità delle singole particelle) noi possiamo conoscere il valore di A *relativo a quello istante* [1].

Nel caso particolare che manchino i vortici, e che il moto sia continuo in tutto lo spazio S (un tal movimento è possibile purchè lo spazio S non sia semplicemente connesso; ed è un movimento stazionario), la funzione $p + \frac{1}{2}\varrho V^2$, ove V denota la grandezza della velocità, ha un valore costante in tutta la massa liquida; onde sarà $p = -\frac{1}{2}\varrho V^2 + \text{cost.}$, e per le formule (1) e (2):

$$\text{(3)} \qquad A = -\tfrac{1}{2}\varrho \int_\sigma V^2 \lambda \, d\sigma .$$

In questo caso particolare il problema che ci siamo proposti è dunque risoluto. Noi vogliamo risolverlo nel caso generale.

2. A tal fine introdurremo una funzione regolare $\varphi(x, y, z)$ armonica nello spazio S $\left(\varDelta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\right)$, che nei punti di σ e σ' soddisfi rispettivamente le condizioni

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda \;, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \,,$$

n denotando, nei punti di σ', come in quelli di σ, la normale interna rispetto ad S: condizioni che, in virtù della formula (2), sono compatibili coll'altra che la funzione φ sia regolare ed armonica in S; e determinano φ a meno di una costante.

Dividiamo lo spazio S in un certo numero di spazî T, in ciascuno dei quali, al tempo t, le componenti di velocità siano continue; e diciamo τ la superficie che limita uno spazio T. All'insieme delle superficie τ apparterranno σ e σ'.

Consideriamo, per ognuna delle τ, l'integrale

$$L = \int_\tau p \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\tau \,,$$

[1] Sul problema della resistenza che incontra, in un fluido indefinito, un solido animato da un movimento traslatorio uniforme, vedansi le interessanti ricerche del Levi-Civita e del Cisotti (Cito la Memoria più recente: Cisotti, *Sul moto di un solido in un canale*. Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, t. XXVIII, a. 1909).

ove n denoti, in un punto qualunque della superficie τ, la normale diretta verso l'interno dello spazio T che essa limita. Sarà allora

$$A = \Sigma L,$$

la somma intendendosi estesa a tutte le superficie chiuse τ (ossia a tutti gli spazî T). E infatti, se $d\theta$ è un elemento di superficie che separa due spazî T, vi saranno due superficie τ a cui appartiene $d\theta$, e per conseguenza, in ΣL, due elementi $p \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} d\tau$, nei quali $d\tau$ coincide con $d\theta$. Ora essi si elidono, giacchè dalle due parti di $d\theta$ la pressione p ha lo stesso valore, mentre $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ ha valori uguali e contrarî. Rimangono così due integrali, come L, estesi a σ' e σ, di cui, per le formule (4), il primo è nullo, il secondo è uguale ad A.

Si tratta di trasformare gl'integrali L. Noi potremo intanto scrivere (chiamando α, β, γ, in tutti i punti di τ, i coseni direttori di n)

$$L = \int_\tau p \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \gamma \right) d\tau,$$

ovvero, trasformando l'integrale esteso a τ in un integrale esteso allo spazio T racchiuso da τ, e tenendo presente l'equazione $\Delta\varphi = 0$

$$L = -\int_T \left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right) dT. \tag{5}$$

3. Ora ricordiamo le equazioni dell'idrodinamica. Posto

$$U = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) = \tfrac{1}{2} V^2,$$

$$\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$f = v\zeta - w\eta, \quad g = w\xi - u\zeta, \quad h = u\eta - v\xi,$$

sarà

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} - f \right), \text{ ecc. } (^1). \tag{6}$$

(¹) Ossia: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\varrho \dfrac{du}{dt}$, ecc. Attribuiamo a $\dfrac{du}{dt}$ e $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ i soliti significati, intendiamo cioè che la derivata $\dfrac{du}{dt}$ sia ottenuta *seguendo una particella nel suo movimento*, la $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ *fissando un punto dello spazio*; onde si ha la nota formula:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} - f.$$

Dovrà poi essere, per l'incompressibilità del liquido,

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{7}$$

E finalmente, nei punti di σ e σ',

$$u\alpha+v\beta+w\gamma=0.$$

Sostituiamo nella formula (5) a $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$, le loro espressioni date dalle equazioni (6). Avremo

$$L=\varrho(L'+L''+L'''), \tag{8}$$

ove

$$L'=\int_T\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dT,$$

$$L''=\int_T\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dT,$$

$$L'''=-\int_T\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+h\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dT.$$

L'integrale L''', ponendo $D=f\frac{\partial\varphi}{\partial x}+g\frac{\partial\varphi}{\partial y}+h\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, ossia

$$D=\begin{vmatrix} u & v & w\\ \xi & \eta & \zeta\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}$$

può scriversi

$$L'''=-\int_T D\,dT. \tag{9}$$

Quanto ad L'' avremo, integrando per parti, e tenendo ancora presente l'equazione $\Delta\varphi=0$:

$$L''=-\int_\tau U\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\tau. \tag{10}$$

Rimane a trasformarsi l'integrale L'.

4. Poichè in un punto qualunque dello spazio S, la funzione φ non varia col tempo, sarà $\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$, ecc.; quindi

$$L'=\int_T\frac{\partial}{\partial t}\left(u\frac{\partial\varphi}{\partial x}+v\frac{\partial\varphi}{\partial y}+w\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)dT,$$

ovvero

$$L' = \int_T \frac{\partial Q}{\partial t} dT,$$

essendo

(11) $$Q = u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + w\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Ma (v. nota al § 3):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{dQ}{dt} - \left(u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z}\right);$$

quindi:

(12) $$L' = \int_T \frac{dQ}{dt} dT - \int_T \left(u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y} + w\frac{\partial Q}{\partial z}\right) dT.$$

Noi possiamo trasformare l'ultimo termine integrando per parti e tenendo presente la condizione d'incompressibilità (7). Se poniamo

$$N = u\alpha + v\beta + w\gamma,$$

avremo:

(13) $$L' = \int_T \frac{dQ}{dt} dT + \int_\tau QN d\tau.$$

5. Sostituiamo ora, nella formula (8), ad L', L'', L''', le loro espressioni (13), (10), (9). Posto

(14) $$E = QN - U\frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

sarà

$$L = \varrho\left(\int_T \frac{dQ}{dt} dT + \int_\tau E d\tau - \int_T D dT\right).$$

E introducendo questo valore di L nella formula $A = \Sigma L$:

(15) $$A = \varrho\left(R + \Sigma\int_\tau E d\tau - \Sigma\int_T D dT\right),$$

ove

$$R = \Sigma\int_T \frac{dQ}{dt} dT.$$

Dimostreremo che *il termine* R *è identicamente nullo*: avremo così ottenuta un'espressione di A che soddisfa alle condizioni richieste.

Perciò osserviamo che si ha:

$$\int_T \frac{dQ}{dt} dT = \frac{d}{dt}\int_T Q dT,$$

purchè s'intenda che negl'istanti successivi a t, T *rappresenti lo spazio* (in generale variabile) *occupato dalla massa che al tempo t occupava lo spazio rappresentato colla stessa lettera* (¹). Onde sarà

$$R = \Sigma \frac{d}{dt} \int_T Q\, dT = \frac{d}{dt} \Sigma \int_T Q\, dT = \frac{dR_0}{dt},$$

essendo

$$R_0 = \Sigma \int_T Q\, dT.$$

Sostituendo a Q la sua espressione, data dalla formula (11), ed eseguendo una trasformazione analoga a quella eseguita su l'ultimo termine dell'equazione (12), avremo

$$\int_T Q\, dT = -\int_\tau \varphi N\, d\tau,$$

quindi

$$R_0 = -\Sigma \int_\tau \varphi N\, d\tau.$$

Ora, la quantità R_0 è nulla (al tempo t, e negli istanti successivi, in cui s'intende che le τ rappresentino sempre le superficie degli spazî T). Se infatti $d\theta$ è un elemento di superficie che separa due spazî T, i due elementi $\varphi N d\tau$ in cui $d\tau$ coincide con $d\theta$ (v. § 2) si elidono, poichè dalle due parti di $d\theta$ φ ha lo stesso valore, mentre la componente normale N della velocità ha valori uguali e contrarii. Inoltre sulla superficie σ e σ' N è uguale a zero. Dunque $R_0 = 0$; ed $R = \frac{dR_0}{dt} = 0$, c. v. d.

Facendo $R = 0$, e scrivendo $\int_S D\, dS$, invece che $\Sigma \int_T D\, dT$, la formula (15) diventa

$$A = \varrho \left(\Sigma \int_\tau E\, d\tau - \int_S D\, dS \right), \tag{16}$$

nella qual formula, per ciò che riguarda il movimento della massa liquida, figurano solo quantità espresse mediante le componenti di velocità u, v, w.

6. Possiamo dare ad A un'altra forma. Diciamo ω l'insieme delle superficie su cui, al tempo t, il moto è discontinuo. Potrà darsi che le superficie ω insieme a σ e σ', non dividano lo spazio S in più spazî T (²): noi supporremo allora di completarle con altre superficie ω_0.

(¹) Noi ammettiamo che per ciascuna delle masse che occupano gli spazî T, il movimento, continuo al tempo t, si conservi sempre tale.

(²) Le ω potranno essere, per es., delle superficie aperte, che non toccano nè σ nè σ'.

L'insieme della superficie τ che limitano gli spazî T sarà costituito delle superficie ω ed ω_0 contate due volte, di σ e σ'.

Sulle superficie ω ed ω_0 fisseremo una faccia positiva; e diremo E il valore di questa quantità sulla detta faccia, E' il suo valore sulla faccia opposta. Sulle superficie σ e σ', E ha un valore unico: sopra σ si ha $N = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \lambda$, quindi $E = -U\lambda$; sopra σ', $N = 0$, $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, quindi $E = 0$. Onde sarà:

$$\Sigma \int_\tau E\,d\tau = \int_\omega (E + E')\,d\omega + \int_{\omega_0} (E + E')\,d\omega_0 - \int_\sigma U\lambda\,d\sigma;$$

ovvero, posto $H = E + E'$:

$$\Sigma \int_\tau E\,d\tau = \int_\omega H\,d\omega + \int_{\omega_0} H\,d\omega_0 - \int_\sigma U\lambda\,d\sigma.$$

Se intendiamo che Q, U, N, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ rappresentino i valori di queste quantità sulle faccie positive di ω ed ω_0, Q' ed U' i valori delle prime due sulle faccie negative, si avrà, per la formula (14),

$$H = (Q - Q')\,N - (U - U')\,\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

avendo N e $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, sulle due faccie, valori uguali e contrarî.

Ma sulle superficie ω_0, ove il moto è continuo, sarà $Q = Q'$, $U = U'$, quindi $H = 0$. Per conseguenza:

$$\Sigma \int_\tau E\,d\tau = \int_\omega H\,d\omega - \int_\sigma U\lambda\,d\sigma;$$

e sostituendo nella formula (16):

$$A = \varrho\left(-\int_\sigma U\lambda\,d\sigma + \int_\omega H\,d\omega - \int_s D\,dS\right).$$

Noi possiamo porre:

$$A' = -\varrho \int_\sigma U\lambda\,d\sigma \quad , \quad A'' = \varrho \int_\omega H\,d\omega \quad , \quad A''' = -\varrho \int_s D\,dS\,,$$

ed avremo:

$$A = A' + A'' + A'''.$$

L'azione A si presenta pertanto decomposta in tre parti, la prima delle quali possiamo attribuire *alla velocità delle particelle liquide che sono a* *contatto colla superficie* σ *di* S_0 ($U = \frac{1}{2} V^2$); la seconda *alle discontinuità del movimento*; la terza (che si annulla con D, quando $\xi = \eta = \zeta = 0$) *ai moti vorticosi*.

Se mancano i vortici, e il movimento è continuo in tutto lo spazio S, sarà $A = A'$: si ricade così nella formula (3).

Chimica vegetale. — *Sulla formazione dei glucosidi per mezzo delle piante*. Nota del Socio G. CIAMICIAN e di C. RAVENNA.

Dalle nostre precedenti esperienze [1] è risultato che inoculando ad alcune piante (mais, giacinti) dei glucosidi, questi vengono scissi in gran parte nell'interno della pianta in modo che si ritrovano, allo stato libero, le sostanze aromatiche che entrano nella loro costituzione. Reciprocamente, inoculando o facendo assorbire in altro modo alcune sostanze aromatiche, si ritrova poi oltre alla sostanza inalterata, un composto che per azione della emulsina si scinde liberando nuove quantità della sostanza introdotta. Abbiamo quindi supposto che le sostanze aromatiche assorbite dalle piante si combinassero in modo da dar origine a dei glucosidi. Di ciò fu data la dimostrazione rigorosa inoculando nel mais la saligenina; siamo riusciti cioè ad isolare dalle piante così trattate il glucoside formatosi, che fu riconosciuto identico alla salicina. Inoltre abbiamo osservato che una gran parte della sostanza introdotta viene distrutta per ossidazione.

Poichè era logico supporre che i fatti osservati fossero dovuti ad azione di enzimi, abbiamo pensato che tali processi dovessero compiersi non soltanto nelle piante viventi, ma ancora nelle poltiglie ottenute triturando le piante e contenenti quindi tutti i principî degli individui originarî. Fu per ciò iniziata, su queste basi, una nuova serie di esperienze, le quali vengono a confermare la nostra supposizione. Ci limitiamo, per ora, alla esposizione delle nostre osservazioni, soprattutto dal lato qualitativo, non potendoci ancòra autorizzare le esperienze eseguite, sebbene numerose, a conclusioni definitive di misura.

Le prove vennero eseguite colle seguenti sostanze: salicina, saligenina, pirocatechina, idrochinone e benzalcianidrina. Si adoperarono piante di mais. Queste venivano ridotte a poltiglia finissima; si introducevano uno o due chilogrammi della massa in un pallone e si aggiungeva la sostanza sciolta in acqua. Il tutto veniva lasciato in riposo per circa due mesi. Come antisettico si usò il toluolo.

[1] Memorie della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, serie 6ª, tomo V, pag. 29 (1907-08); serie 6ª, tomo VI, pag. 109 (1908-09). Questi Rendiconti, 18, 1, 419 (1909).