ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

delle sostanze enzimatiche contenute probabilmente nel mais è quindi analogo, anche per ciò che riguarda l'azione sintetica, a quello dell'emulsiina.

Pirocatechina. — Si fecero due prove: l'una al buio, l'altra alla luce. Tanto nel primo caso che nel secondo si trovò, oltre sostanza inalterata, una piccolissima quantità dello stesso corpo che si libera per azione dell'emulsina. Anche la pirocatechina, dunque, si combina in modo simile alla saligenina per dare origine a corpi di natura glucosidica.

Tale sostanza inoltre viene in gran parte distrutta, così che si ritrova poco più di un terzo della sostanza introdotta.

Idrochinone. — Anche coll'idrochinone si fece l'esperienza al buio e alla luce. Si ottenne, in entrambi i casi, dopo esaurimento con etere e successiva aggiunta di emulsina, una piccolissima quantità di sostanza cristallina che però non potè essere identificata. È probabile trattarsi di idrochinone, il quale così si comporterebbe, colla poltiglia del mais, similmente agli altri fenoli studiati.

La quantità di idrochinone ritrovata allo stato libero, fu circa due terzi di quella adoperata.

Nitrile mandelico. — Con questa sostanza si ebbe pure indizio della formazione di un glucoside. L'estratto acquoso della poltiglia fu dapprima distillato col vapore fino che il distillato non dava più la reazione dell'acido prussico. Nel residuo si aggiunse emulsina e si distillò di nuovo. Le prime porzioni del distillato diedero, lievissima, la reazione del bleu di Prussia.

Le esperienze esposte dimostrano dunque che le sostanze attive contenute nella poltigiia di mais, oltre ad esercitare un'azione scomponente sui glucosidi, quali la salicilina, sono capaci di trasformare le sostanze aromatiche (come la saligenina, la pirocatechina e forse anche l'idrochinone ed il nitrile mandelico), in glucosidi.

Quale influenza possano avere la luce od altre condizioni sull'intensità del fenomeno, non possiamo ancora affermare con sicurezza; tali questioni saranno argomento di ulteriori ricerche.

Matematica. — *Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier.* Nota di Giuditta Graziani, presentata dal Corrispondente A. Di Legge.

In una mia Nota pubblicata nel volume XVIII, 2° semestre, serie 5ª, fasc. 6°, dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, ho riportato le condizioni alle quali deve soddisfare la funzione $f(x)$ affinchè possa essere rappresentata mediante la formula integrale di Fourier. Ho anche mostrato come alcune funzioni alle quali non si potrebbe applicare nè il criterio di Weber, nè quello di Pringsheim siano pur esse rappresentabili con la formula di Fourier.

Ora voglio far notare che oltre le funzioni cui ho accennato è rappresentabile con la stessa formula suindicata il prodotto di ogni funzione $\psi(\lambda)$ monotòna per una funzione oscillante (per es. $\cos \varrho\lambda$) che sia indipendente dalla variabile d'integrazione α. Si ha cioè

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda = 0,$$

e questo basta, come è noto [1] per ritenere stabilita la formula integrale di Fourier.

Il dott. Orlando ha dimostrato [2] la stessa proprietà; ma siccome egli ha seguito un procedimento diverso da quello da me tenuto, non credo del tutto inutile questo mio lavoro, che viene a confermare la verità delle relazioni già trovate dal dott. Orlando.

Consideriamo dunque la funzione

$$\text{(1)} \qquad F(\alpha) = \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda \, .$$

Si dimostra facilmente [3] che essa è una funzione continua di $\alpha \gtrless \varrho$, $\alpha \gtrless -\varrho$, quando $\psi(\lambda)$ sia monotòna e tenda a zero per $\lambda = \infty$, e perciò è integrabile fra i due numeri positivi μ e ν. Vediamo il limite di

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda \qquad \text{per } \eta = \infty \, .$$

Scriviamo:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda =$$
$$= \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda + \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda$$

per escludere i punti $\alpha = \varrho$; $\alpha = -\varrho$.

Questa espressione è uguale alla seguente:

$$\frac{1}{2}\int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha + \varrho)\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_\mu^{\varrho-\varepsilon} d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha - \varrho)\lambda \, d\lambda +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha + \varrho)\lambda \, d\lambda + \frac{1}{2}\int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda) \cos(\alpha - \varrho)\lambda \, d\lambda \, ,$$

(1) Nota del dott. L. Orlando, pubblicata nel vol. XVII di questi Rendiconti (ser. 5ª, 2° sem., fasc. 8°).

(2) *Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 2° sem. fasc. 9°.

(3) Si può usare il metodo seguito dal dott. Orlando per la funzione $\int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \alpha\lambda \, d\lambda$ nella Nota pubblicata nel vol. XVII, ser. 5ª, 2° sem., fasc. 8° di questi Rendiconti.

ma si ha per il secondo teorema della media:

$$\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\lambda = \psi(\gamma)\,\frac{\sin(\alpha+\varrho)\,\xi - \sin(\alpha+\varrho)\,\gamma}{\alpha+\varrho} \leq \frac{2\psi(\gamma)}{\alpha+\varrho}$$

e per γ abbastanza alto può rendersi $< \dfrac{\omega}{4(\varrho-\mu-\varepsilon)}$ e analogamente

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\, d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\varrho-\mu-\varepsilon)}$$

o anche

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\nu-\varrho-\varepsilon')}$$

$$\left|\int_\gamma^\infty \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\, d\lambda\right| < \frac{\omega}{4(\nu-\varrho-\varepsilon')},$$

risulta perciò:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_\gamma^\eta \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda < \omega$$

per η e γ abbastanza alti. Allora poichè $\int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda$ ha un limite ben definito possiamo scrivere:

$$\int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda = \int_a^\infty d\lambda \int_\mu^\nu \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\alpha +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\, d\alpha + \frac{1}{2}\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\, d\alpha.$$

Da cui otteniamo:

$$\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho-\varepsilon)\lambda\, d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu+\varrho)\lambda\, d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu+\varrho)\lambda\, d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho+\varepsilon')\lambda\, d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_\mu^{\varrho-\varepsilon} \psi(\lambda)\cos(\alpha-\varrho)\lambda\, d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon\lambda\, d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu-\varrho)\lambda\, d\lambda$$

$$\int_a^\infty d\lambda \int_{\varrho+\varepsilon'}^\nu \psi(\lambda)\cos(\alpha+\varrho)\lambda\, d\alpha = \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu-\varrho)\lambda\, d\lambda -$$

$$- \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon'\lambda\, d\lambda.$$

Cerchiamo ora il

$$\lim_{\substack{\nu=\infty \\ \mu=0}} \int_{\mu}^{\nu} d\alpha \int_{a}^{\infty} \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda$$

e perciò consideriamo gli integrali a secondo membro di ciascuna delle ultime uguaglianze.

Si ha subito

$$\int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu+\varrho)\lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos(\nu+\varrho)\xi - \cos(\nu+\varrho)a}{\nu+\varrho}$$

ossia

$$\left| \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu+\varrho)\lambda \, d\lambda \right| \leqq \frac{2\psi(a)}{a(\nu+\varrho)}$$

da cui

$$\lim_{\nu=\infty} \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu+\varrho)\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Analogamente si verifica che

$$\lim_{\nu=\infty} \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu-\varrho)\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Ma è anche

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{0}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Infatti si può scrivere:

$$(2) \qquad \int_{a}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda = \int_{a}^{\eta} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda + \int_{\eta}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$$

e ponendo qui $\lambda' = \varepsilon\lambda$ e quindi togliendo l'accento si ha:

$$\int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda'}{\varepsilon}\right)}{\lambda'} \sin \lambda' d\lambda = \int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda =$$

$$= \lim_{\theta=\infty} \psi(\eta) \int_{\eta\varepsilon}^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda + \lim_{\theta=\infty} \psi\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right) \int_{\xi}^{\theta} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda ,$$

ove $\xi > \eta\varepsilon$. Siccome $\int_{\xi}^{\theta} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$ resta sempre entro limiti finiti e siccome $\psi\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right)$ si annulla per $\theta = \infty$ abbiamo

$$\int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda = \lim_{\theta=\infty} \psi(\eta) \int_{\eta\varepsilon}^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda ,$$

ma prendendo η abbastanza grande per ε qualunque, si ottiene

$$\left| \int_{\eta\varepsilon}^{\infty} \frac{\psi\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right)}{\lambda} \sin \lambda \, d\lambda \right| < \frac{\omega}{2} .$$

Il primo integrale a secondo membro della (2) è funzione continua di ε quindi, per ε abbastanza piccolo, si ha

$$\int_a^{\eta} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda < \frac{\omega}{2} ,$$

ma allora $\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda$ è arbitrariamente vicino a zero (più di ω) per $\varepsilon = 0$.

Nello stesso modo si vede che

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi\lambda}{\lambda} \sin \varepsilon'\lambda \, d\lambda = 0 .$$

Prendiamo ora a considerare l' $\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho) \lambda \, d\lambda$. Si ha

$$\int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho) \lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos(\mu + \varrho) \xi - \cos(\mu + \varrho) a}{\mu + \varrho}$$

e per $\mu = 0$ esso diventa $= \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho \xi - \cos \varrho a}{\varrho}$ ossia

$$\lim_{\mu=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho) \lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho \xi - \cos \varrho a}{\varrho}$$

e analogamente:

$$\lim_{\mu=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu - \varrho) \lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho \xi - \cos \varrho a}{-\varrho}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho - \varepsilon) \lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho \xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho}$$

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{\infty} \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho + \varepsilon') \lambda \, d\lambda = \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho \xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} .$$

Da tutto ciò si deduce che:

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda = \lim_{\substack{\nu=\infty \\ \mu=0}} \int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda) \cos \varrho\lambda \cos \alpha\lambda \, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{\varepsilon=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho - \varepsilon)\lambda \, d\lambda - \lim_{\mu=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu + \varrho)\lambda \, d\lambda + \right.$$

$$+ \lim_{\nu=\infty} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu + \varrho)\lambda \, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(2\varrho + \varepsilon')\lambda \, d\lambda -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon\lambda \, d\lambda - \lim_{\mu=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\mu - \varrho)\lambda \, d\lambda +$$

$$\left. + \lim_{\nu=\infty} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin(\nu - \varrho)\lambda \, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} \sin \varepsilon'\lambda \, d\lambda \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho\xi - \cos \varrho a}{\varrho} - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a} \frac{\cos \varrho\xi - \cos \varrho a}{-\varrho} \right\} = 0 .$$

Da questo resta stabilito che la funzione $\psi(\lambda) \cos \varrho\lambda$ è rappresentabile con la formula integrale di Fourier.

Con analogo procedimento si dimostra che anche $\psi(\lambda) \sin \varrho\lambda$ è rappresentabile con la stessa formula.

Applicando ora il criterio esposto nel mio citato lavoro si giunge facilmente alla formula (10) della nuova Nota del dott. Orlando sebbene i due metodi siano, come è facile vedere, essenzialmente diversi.

Fisica matematica. — *Sopra un problema di dinamica degli elettroni.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio Volterra.

Lo studio dei fenomeni luminosi che si osservano in un tubo di vetro contenente del gas rarefatto, percorso da scariche elettriche ed esposto all'azione di un campo magnetico, ha indotto il prof. Righi [1] a formulare l'ipotesi che quei fenomeni siano dovuti alla formazione di certi raggi, che egli denomina *raggi magnetici*, i quali sarebbero prodotti dal moto traslatorio di tanti sistemi elettricamente neutri, simili a stelle doppie, e formati ciascuno d'un ione positivo e d'un elettrone negativo. L'elettrone si muoverebbe, relativamente all'ione, alla stessa guisa d'un pianeta che graviti

[1] Cfr. A. Righi, *La materia radiante e i raggi magnetici*, Bologna, 1909; *Sul moto di un elettrone intorno ad un ione nel campo magnetico* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, t. XVII, 1908, pp. 675-681; Il Nuovo Cimento, t. XVII, 1° semestre 1909, pp. 195-202).