ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

2. Con considerazione analoga a quella del n. 5 della Nota 2ª si trova, come estensione del precedente teorema, quest'altro: *Se $h(<r)$ ipersuperficie* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *si segano in una Φ_{r-h} qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile, che sia* $(s_1 s_2 \ldots, s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \ldots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie*

$$BF + A_1F_1 + \cdots + A_hF_h = 0 \tag{3}$$

abbia la parte stessa multipla secondo il numero

$$\alpha - s_1 s_2 \ldots s_h + s_1 + s_2 + \cdots + s_h - h + 1, \tag{4}$$

F *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \ldots F_h)$.

3. Infine si può trarre dai due teoremi precedenti il seguente: *Se $h(\leq r)$ ipersuperficie* $F_1, F_2, \ldots, F_h$ *si segano in una Φ_{r-h} qualsiasi e per ciascuna sua parte irriducibile (o punto se $r = h$), che sia* $(s_1 s_2 \ldots s_h \alpha)$, *esistono ipersuperficie* $B, A_1, \ldots, A_h$, *delle quali* B *non contenga quella parte, così che la ipersuperficie* (3) *passi comunque per la parte stessa,* F^σ *appartiene al modulo* $(F_1 F_2 \ldots F_h)$, *essendo σ non minore del massimo dei numeri* (4).

Infatti, elevando ciascuna (3) alla potenza σ, si hanno evidentemente per F^σ le ipotesi dei teoremi dei n. 1, 2.

Matematica. — *Sull' integrazione dell' equazione $\Delta^{2i} U = 0$ per le aree piane.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Nella mia comunicazione al IV Congresso internazionale dei Matematici (Roma, 6-11 aprile 1908) indicavo un metodo atto a integrare l'equazione $\Delta^{2i} U = 0$, per dati valori al contorno di U e delle sue derivate normali dei primi $i - 1$ ordini, ed equazioni ancora più generali. Ivi limitavo i miei calcoli, per dimostrare il teorema di esistenza, al caso di $i = 3$ e delle *tre* dimensioni; però essi possono estendersi al caso di i qualsiasi e di un numero qualunque di dimensioni. Il detto metodo è la generalizzazione di quello che avevo dato circa un anno prima per il caso di $i = 2$ e delle *tre* dimensioni [1].

Ancora prima della pubblicazione di questo caso, ero in possesso, per $i = 2$ e per le *due* dimensioni, di un metodo del tutto diverso e più diretto, pubblicato ora nel vol. 32 degli Acta Mathematica [2]. Questo metodo, che caratterizza il caso delle *due* dimensioni e che suggerisce l'estensione di

[1] *Sull' integrazione dell'equazione* $\Delta^4 V = 0$. Rend. Acc. Lincei, vol. XVI, 2° sem.

[2] *Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.*

concetti notorii nella teoria delle funzioni armoniche sul piano [1], si generalizza al caso di i qualsiasi.

Mi limito qui a comunicare i punti essenziali di tale generalizzazione, riserbandomi di svilupparne i dettagli in una prossima Memoria.

Teoremi di trasformazione.

1. Sia C una linea piana chiusa, la quale non si intersechi. Riferiamo i punti di C ad un sistema di assi cartesiani ortogonali x, y; ed indichiamo con σ l'area piana finita limitata da C, con σ' l'area piana infinita pure limitata da C, con s l'arco variabile della curva C, contato a partire da un punto fisso arbitrario, e con n la normale nei punti di C. In ogni punto di C possiamo fissare la direzione positiva della normale n e la direzione positiva della tangente in modo che, posto:

$$\lambda = \cos \widehat{nx} = \frac{dx}{dn} \;, \quad \mu = \cos \widehat{ny} = \frac{dy}{dn} \,,$$

risulti:

$$\cos \widehat{sx} = \frac{dx}{ds} = \mu \;, \quad \cos \widehat{sy} = \frac{dy}{ds} = -\lambda \,. \tag{1}$$

Introdotte le notazioni:

$$\frac{d^t}{dn^t} = \frac{\partial^t}{\partial x^t}\lambda^t + \binom{t}{1}\frac{\partial^t}{\partial x^{t-1}\,\partial y}\lambda^{t-1}\mu + \cdots + \binom{t}{t-1}\frac{\partial^t}{\partial x\,\partial y^{t-1}}\lambda\mu^{t-1} + \frac{\partial^t}{\partial y^t}\mu^t \,,$$

$$\frac{d^t}{ds^t} = \frac{\partial^t}{\partial x^t}\left(\frac{dx}{ds}\right)^t + \binom{t}{1}\frac{\partial^t}{\partial x^{t-1}\,\partial y}\left(\frac{dx}{ds}\right)^{t-1}\frac{dy}{ds} + \cdots +$$

$$+ \binom{t}{t-1}\frac{\partial^t}{\partial x\,\partial y^{t-1}}\frac{dx}{ds}\left(\frac{dy}{ds}\right)^{t-1} + \frac{\partial^t}{\partial y^t}\left(\frac{dy}{ds}\right)^t \,,$$

si ha per una funzione qualsiasi $\mathrm{U}(x\,,y)$ che *i valori nei punti di* C *di* $\frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial x^{i-2}\,\partial y}, \dots, \frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial y^{i-1}}$ *si possono esprimere linearmente ed omogeneamente per mezzo di* $\frac{d^{i-1}\mathrm{U}}{ds^{i-1}}, \frac{d^{i-2}}{ds^{i-2}}\left(\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right), \dots, \frac{d^{i-1}\mathrm{U}}{dn^{i-1}}$.

2. Date ad arbitrio i funzioni dei punti di C: $\alpha_1(s)\,, \alpha_2(s)\,, \dots, \alpha_i(s)$, e posto: $\mathrm{U} = \alpha_1(s)\,, \frac{d\mathrm{U}}{dn} = \alpha_1(s)\,, \dots, \frac{d^{i-1}\mathrm{U}}{dn^{i-1}} = \alpha_i(s)$, si indichino rispettivamente con $a_1(s)\,, a_2(s)\,, \dots, a_i(s)$ i valori nei punti di C di

$$\frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial x^{i-1}}\,, \frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial x^{i-2}\,\partial y}\,, \dots, \frac{\partial^{i-1}\mathrm{U}}{\partial y^{i-1}}\,.$$

[1] Simile osservazione può farsi ancora per equazioni più generali. Cfr. ad es. Lauricella, *Sulle equazioni della deformazione delle piastre elastiche cilindriche*, § 5, Rend. Acc. Lincei, vol. XIV, 1° sem.

Sia $U_1(x, y)$ integrale delle equazioni:

$$(2)\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma \text{ o di } \sigma') & \Delta^{2i} U_1 = 0, \\ \text{(nei punti di C)} & \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-1}} = a_1(s), \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-2}\partial y} = a_2(s), \ldots, \dfrac{\partial^{i-1} U_1}{\partial y^{i-1}} = a_i(s). \end{cases}$$

Se $P(x, y)$ è un polinomio qualsiasi di grado $i-2$ in x, y, l'espressione:

$$U'(x, y) = U_1(x, y) + P(x, y)$$

sarà pure un integrale delle equazioni (2); e si dimostra che *si può determinare il polinomio* $P(x, y)$ *in modo che nei punti di* C *risulti*:

$$U' = \alpha_1(s), \frac{dU'}{dn} = \alpha_2(s), \ldots, \frac{d^{i-1}U'}{dn^{i-1}} = \alpha_i(s).$$

Quindi *l'integrazione delle equazioni*:

$$(2)'\quad \begin{cases} \text{(nei punti di } \sigma \text{ o di } \sigma') & \Delta^{2i} U = 0, \\ \text{(nei punti di C)} & U = \alpha_1(s), \dfrac{dU}{dn} = \alpha_2(s), \ldots, \dfrac{d^{i-1}U}{dn^{i-1}} = \alpha_i(s) \end{cases}$$

si può fare dipendere dall'integrazione delle equazioni (2).

3. Posto:

$$u_1(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-1}}, u_2(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial x^{i-2}\partial y}, \ldots, u_i(x, y) = \frac{\partial^{i-1} U_1}{\partial y^{i-1}},$$

$$\theta = \frac{\partial^{i-1} u_1}{\partial x^{i-1}} + \binom{i-1}{1} \frac{\partial^{i-1} u_2}{\partial x^{i-2}\partial y} + \cdots + \binom{i-1}{i-2} \frac{\partial^{i-1} u_{i-1}}{\partial x\, \partial y^{i-2}} + \frac{\partial^{i-1} u_i}{\partial y^{i-1}},$$

risulterà dalle (2):

$$(A)\quad \begin{cases} \left(\begin{array}{c}\text{nei punti di } \sigma \\ \text{o di } \sigma'\end{array}\right) & \begin{array}{ll} (3) & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = \dfrac{\partial u_3}{\partial x}, \ldots, \dfrac{\partial u_{i-1}}{\partial y} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x}, \\ (4) & \Delta^2 \theta = 0, \end{array} \\ \text{(nei punti di C)} & u_1 = a_1(s), u_2 = a_2(s), \ldots, u_i = a_i(s). \end{cases}$$

Le equazioni (3), nel caso dell'area finita σ, dànno come conseguenza le $\dfrac{i(i-1)}{2}$ condizioni:

$$(5)\quad \int_C \left\{ a_r \cos^t \widehat{sx} + \binom{t}{1} a_{r+1} \cos^{t-1} \widehat{sx} \, . \cos \widehat{sy} + \cdots + a_{r+t} \cos^t \widehat{sy} \right\} ds = 0,$$

$$(t = 1, 2, \ldots, i-1 \; ; \; r = 1, 2, \ldots, i-t)$$

le quali sono necessarie e sufficienti per la monodromia della funzione U_1 e delle sue derivate dei primi $i-2$ ordini.

Sussiste il seguente teorema: *l'integrazione delle equazioni* (2) *si può ricondurre all'integrazione delle equazioni* (A), *e viceversa.*

TEOREMI DI UNICITÀ.

4. Posto:

$$\theta_t = \frac{\partial u_t}{\partial x} + \frac{\partial u_{t+1}}{\partial y},$$

risulta dalle (3):

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial y} = \frac{\partial \theta_{t+1}}{\partial x}.$$

Introduciamo le $i-1$ funzioni $v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}$ [1] determinate dalle equazioni:

$$(6)\quad (i-1)\frac{\partial \theta_t}{\partial y} = (i-1)\frac{\partial \theta_{t+1}}{\partial x} = (-1)^t (i-t-1)\frac{\partial v_{i-t-1}}{\partial y} + (-1)^t t \frac{\partial v_{i-t}}{\partial x},$$
$$(t = 0, 1, 2, \ldots, i-1)$$

le quali, come si può provare, *equivalgono ad un sistema completamente integrabile.* Dalle (3) e dalle (6) risulta:

$$\begin{pmatrix}\text{nei punti di } \sigma \\ \text{o di } \sigma'\end{pmatrix} \binom{i-1}{t-1} \Delta^2 u_t + (-1)^t \binom{i-2}{t-1} \frac{\partial v_{i-t}}{\partial y} +$$
$$+ (-1)^t \binom{i-2}{t-2} \frac{\partial v_{i-t+1}}{\partial x} = 0.$$

Da queste equazioni, introducendo convenienti coefficienti costanti $b_{t,r}$, e facendo percorrere all'indice p tutti i numeri dispari non superiori ad i, all'indice q tutti i numeri pari non superiori ad i, si ottiene, mediante opportune integrazioni per parti,

$$(7)\quad 0 = \int_\sigma \Bigg[\Big\{ \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \frac{\partial u_p}{\partial x} + \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \frac{\partial u_q}{\partial y} \Big\}^2 +$$
$$+ \Big\{ \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \frac{\partial u_p}{\partial y} - \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \frac{\partial u_q}{\partial x} \Big\}^2 \Bigg] d\sigma +$$
$$+ \int_c \sum_1^i {}_t\, u_t X_t\, ds,$$

[1] Queste v rappresentano un'estensione del concetto di *funzione armonica coniugata.*

dove:

$$(8) \quad X_t = \binom{i-1}{t-1} \frac{du_t}{dn} + \Sigma_r (-1)^{\frac{t+r+1}{2}} \left\{ b_{tr} \pm \binom{i-1}{t-1} \binom{i-1}{r-1} \right\} \frac{du_r}{ds} +$$

$$+ (-1)^t \left\{ \binom{i-2}{t-1} v_{i-t} \cos \widehat{ny} + \binom{i-2}{t-2} v_{i-t+1} \cos \widehat{nx} \right\},$$

intendendo di prendere il segno $+$ e di estendere il sommatorio Σ_r a tutti i numeri pari non superiori ad i per t dispari, di prendere il segno — e di estendere il detto sommatorio a tutti i numeri dispari non superiori ad i per t pari.

Una formola (7)′ perfettamente analoga alla (7) si ha per l'area infinita σ'.

5. Si consideri il sistema (B) di equazioni formato dalle (3), (4) e dalle altre:

$$(9) \quad \begin{cases} \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \dfrac{\partial u_p}{\partial x} + \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \dfrac{\partial u_q}{\partial y} = 0, \\ \Sigma_p (-1)^{\frac{p-1}{2}} \binom{i-1}{p-1} \dfrac{\partial u_p}{\partial y} - \Sigma_q (-1)^{\frac{q}{2}} \binom{i-1}{q-1} \dfrac{\partial u_q}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

e si ponga:

$$\beta_{r,s} = \begin{cases} 0 \text{ se } r+s \text{ è dispari,} \\ -\dfrac{1.3\ldots(2i-r-s-1).1.3\ldots(r+s-3)}{2.4\ldots(2i-2)} \text{ se } r+s \text{ è pari,} \end{cases}$$

$$u_r^{(s,t)} = \beta_{r,s} x^t + \binom{t}{1} \beta_{r,s+1} x^{t-1} y + \cdots + \binom{t}{t-1} \beta_{r,s+t-1} x y^{t-1} + \beta_{r,s+t} y^t.$$

$$(r = 1, 2, \ldots, i; \; t = 0, 1, \ldots, i-1; \; s = 1, 2, \ldots, i-t)$$

Le i funzioni:

$$(10) \qquad u_r = \sum_{s,t} a_{s,t} u_r^{(s,t)}, \quad (r = 1, 2, \ldots, i)$$

nelle quali le $a_{s,t}$ rappresentano $\dfrac{i(i+1)}{2}$ coefficienti arbitrari, dànno il sistema più generale di integrali del sistema (B).

6. Nel caso particolare in cui le $u_1, u_2, \ldots, u_i$ sono costanti, le equazioni (6) si integrano facilmente e le espressioni X_t assumono una forma particolare $X_t^{(0)}$, contenente $\dfrac{i(i-1)}{2}$ costanti arbitrarie.

Ciò premesso, si hanno i seguenti teoremi di unicità:

α) se $u_1, u_2, \ldots, u_i$ sono integrali delle equazioni (3), (4) *nel campo finito σ tali che $a_1(s) = a_2(s) = \cdots = a_i(s) = 0$, si avrà*:

$$(\text{nei punti di } \sigma) \qquad u_1 \ldots u_2 \ldots = u_i = 0;$$

β) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono un sistema di integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo* σ, *tale che*

$$(\text{nei punti di C}) \qquad X_t = X_t^{(0)},$$

si avrà che queste $u_1, u_2, \dots, u_i$ *devono necessariamente avere la forma* (10);

γ) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo infinito* σ', *tali che* $a_1(s) = a_2(s) = \cdots = a_i(s) = 0$, *e se a distanza infinita si annullano in modo che sia applicabile ad essi la formola* (7)', *si avrà*:

$$(\text{nei punti di } \sigma') \qquad u_1 = u_2 = \cdots = u_i = 0 ;$$

δ) *se* $u_1, u_2, \dots, u_i$ *sono integrali delle equazioni* (3), (4) *nel campo infinito* σ', *tali che* $X_1 = X_2 = \cdots = X_i = 0$, *e se a distanza infinita si annullano...*, *si avrà*:

$$(\text{nei punti di } \sigma') \qquad u_1 = u_2 = \cdots = u_i = 0 .$$

Studio di funzioni speciali.

7. Posto:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \quad , \quad u_{h.k} = \left(-\frac{\partial r}{\partial y}\right)^{2i-h-k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{h+k-2} \frac{d \log r}{dn},$$

si verifica che gli i sistemi

$$u_{h.1}, u_{h.2}, \dots, u_{h.i}, \quad (h = 1, 2, \dots, i)$$

considerati come funzioni di ξ η, formano i sistemi di integrali delle equazioni (3), (4). Gli integrali delle corrispondenti equazioni (6) si calcolano facilmente; e con considerazioni notorie, si trova:

$$\int_C u_{h.k}\, ds = 2\pi\beta_{h.k} \ , \ \pi\beta_{h.k} \ , \ 0 , \tag{11}$$

secondo che il punto (ξ, η) appartiene all'area finita σ, al contorno C, o all'area infinita σ'.

Sussiste poi la formola:

$$\tag{12} \left\{ \begin{aligned} &\beta_{h.k}\, \xi^t + \binom{t}{1} \beta_{h.k+1}\, \xi^{t-1} \eta + \cdots + \binom{t}{t-1} \beta_{h.k+t-1}\, \xi \eta^{t-1} + \beta_{h.k+t}\, \eta^t = \\ &\qquad = \frac{1}{2\pi} \int_C \left\{ u_{h.k}\, x^t + \binom{t}{1} u_{h.k+1}\, x^{t-1} y + \cdots + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \binom{t}{t-1} u_{h.k+t-1}\, x y^{t-1} + u_{h.k+t}\, y^t \right\} ds . \\ &(h = 1, 2, \dots, i \ ; \ t = 0, 1, \dots, i-1 \ ; \ k = 1, 2, \dots, i-t). \end{aligned} \right.$$

Estensione dei doppî strati.

8. Supponiamo che la linea chiusa C sia tale che si possa fissare un limite superiore del numero dei punti in cui essa è tagliata da una retta qualsiasi del suo piano. Siano $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_i(s)$ funzioni finite e continue arbitrarie dei punti di C, sia s_0 un punto generico di C con tangente determinata. Indichiamo con p o con p' il punto (ξ, η), secondo che appartiene a σ o a σ'; ed indichiamo ancora con $u'_{h.k}(s, s_0)$ ciò che diviene $u_{h.k}$ quando il punto $(x, y) \equiv s$ varia su C e il punto (ξ, η) coincide con $s_0 \equiv (\xi', \eta')$. Ciò premesso, sussistono, come estensione della nota formola di discontinuità di doppio strato, le seguenti formole:

$$(13)\quad \lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds = \sum_1^i{}_t\, \beta_{h.t}\, \varphi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, u'_{h.t}(s, s_0)\, \varphi_t(s)\, ds,$$

$$(14)\quad \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds = -\sum_1^i{}_t\, \beta_{h.t}\, \varphi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, u'_{h.t}(s, s_0)\, \varphi_t(s)\, ds.$$

Dalle (12), (13) segue:

$$(12)'\quad \left\{ \begin{aligned} &\beta_{h.k}\, \xi'^t + \binom{t}{1} \beta_{h.k+1}\, \xi'^{t-1} \eta' + \cdots = \\ &\quad = \frac{1}{\pi} \int_C \left\{ u'_{h.k}(s, s_0)\, x^t + \binom{t}{1} u'_{h.k+1}(s, s_0)\, x^{t-1} y + \cdots \right\} ds. \\ &(h = 1, 2, \dots, i\ ;\ t = 0, 1, \dots, i-1\ ;\ k = 1, 2, \dots, i-t). \end{aligned} \right.$$

9. Le i funzioni:

$$(15)\qquad \Phi_h(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, u_{h.t}\, \varphi_t(s)\, ds$$

formano un sistema di integrali delle equazioni (3), (4); e come estensione del noto teorema di continuità della derivata normale di doppio strato, si ha che *le espressioni* X_t *relative alle* $\Phi_h(\xi, \eta)$ *hanno valori uguali dalle due bande della linea* C; e precisamente, *supposto che le coordinate dei punti di* C, *considerate come funzioni di* s, *siano finite e continue insieme alle loro derivate dei due primi ordini, e che le funzioni* $\varphi_t(s)$ *abbiano le derivate del primo ordine finite e continue in tutto* C, indicando con n_0 la normale alla linea C nel punto arbitrario s_0, con $\overline{X}_t$ l'espressione X_t, relativa alle $\Phi_h(\xi, \eta)$, costruita nel punto p dell'area σ rispetto alla direzione n_0, con $\overline{\overline{X}}_t$ la medesima espressione costruita nel punto p' dell'area infinita σ', si ha che *se esiste uno dei due limiti* $\lim_{p=s_0} \overline{X}_t$, $\lim_{p'=s_0} \overline{\overline{X}}_t$, *esisterà anche l'altro, e tutti e due saranno uguali.*

Estensione degli strati semplici.

10. Indichiamo con (ξ , η) un punto qualsiasi del piano della linea C; e poniamo:

$$\frac{\delta}{\delta n_0} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cos \widehat{n_0 x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cos \widehat{n_0 y} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \cos \widehat{n_0 z} ,$$

$$w_{h.k} = \left(-\frac{\partial r}{\partial y}\right)^{2i-h-k} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{h+k-2} \frac{\delta \log r}{\delta n_0} .$$

Le funzioni $w_{h.k}$ godono di proprietà analoghe alle $u_{h.k}$. In particolare gli i sistemi:

$$w_{h.1} , w_{h.2} , \dots , w_{h.i} , \quad (h = 1 , 2 , \dots , i)$$

considerati come funzioni di ξ , η, formano i sistemi di integrali delle equazioni (3), (4).

Introducendo l'espressione $w'_{h.k}(s , s_0)$ analoga alla $u'_{h.k}(s , s_0)$, si ha, come estensione del noto teorema di discontinuità delle derivate normali di strato semplice, che *se le coordinate dei punti di* C *hanno le derivate dei due primi ordini rispetto ad s finite e continue, se* $\psi_1(s) , \psi_2(s) , \dots , \psi_i(s)$ *sono i funzioni finite e continue dei punti di* C, *sussistono le seguenti formole*:

$$\text{(16)} \qquad \lim_{p=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, w_{h.t}\, \psi_t(s)\, ds = - \sum_1^i{}_t\, \beta_{h.t}\, \psi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, w'_{h.t}(s , s_0)\, \psi_t(s)\, ds ,$$

$$\text{(17)} \qquad \lim_{p'=s_0} \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, w_{h.t}\, \psi_t(s)\, ds = \sum_1^i{}_t\, \beta_{h.t}\, \psi_t(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i{}_t\, w'_{h.t}(s , s_0)\, \psi_t(s)\, ds .$$

11. Le funzioni $w_{h1} , w_{h2} , \dots , w_{hi}$ sono integrali delle equazioni (3), (4) anche considerate come funzioni di x , y; allora, in forza delle condizioni (5) a cui debbono necessariamente soddisfare queste funzioni, quando il punto (x , y) varia in σ, mentre il punto (ξ , η) è nell'area σ', e in virtù della (17), risulta:

$$\text{(18)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \beta_{h.\tau} \cos^t \widehat{s_0 x} + \binom{t}{1} \beta_{h.\tau+1} \cos^{t-1} \widehat{s_0 x} . \cos \widehat{s_0 y} + \cdots + \\ & \qquad + \binom{t}{t-1} \beta_{h.\tau+t-1} \cos \widehat{s_0 x} . \cos^{t-1} \widehat{s_0 y} + \beta_{h.\tau+t} \cos^t \widehat{s_0 y} + \\ & + \frac{1}{\pi} \int_C \Big\{ w'_{h.\tau}(s , s_0) \cos^t \widehat{sx} + \binom{t}{1} w'_{h.\tau+1}(s , s_0) \cos^{t-1} \widehat{sx} . \cos \widehat{sy} + \\ & \qquad + \cdots + w'_{h.\tau+1}(s , s_0) \cos^t \widehat{sy} \Big\} ds = 0 . \\ & (h = 1 , 2 , \dots , i \;;\; t = 1 , 2 , \dots , i-1 \;;\; \tau = 1 , 2 , \dots , i-t). \end{aligned} \right.$$

Osserviamo ancora la formola:

$$w'_{h.t}(s\,,s_0) = u'_{h.t}(s_0\,,s)\,. \tag{19}$$

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA INTERNO.

12. Si considerino le equazioni integrali:

$$\left\{\begin{array}{l} a_t(s_0) = \sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t.\tau}\, \varphi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t.\tau}(s\,,s_0)\, \varphi_\tau(s)\, ds\,, \\ \qquad (t = 1\,.\,2\,,\ldots,i) \end{array}\right. \tag{20}$$

e i due corrispondenti sistemi omogenei e coniugati:

$$0 = \sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t.\tau}\, \psi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t.\tau}(s\,,s_0)\, \psi_\tau(s)\, ds\,, \tag{21}$$

$$0 = \sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t.\tau}\, \chi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi}\int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t.\tau}(s_0\,,s)\, \chi_\tau(s)\, ds\,. \tag{21$'$}$$

Il determinante delle $\beta_{t.\tau}$ *è diverso da zero*; sicchè i sistemi (20), (21), (21)' equivalgono a sistemi di equazioni integrali di 2ª specie; e per conseguenza possiamo ad essi applicare i noti teoremi di Fredholm.

In virtù delle (18), (19) si ha che il sistema (21)' ammette le seguenti $\frac{i(i-1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\chi_{h.1}(s) = 0\,,\ldots,\chi_{h.h-1}(s) = 0\;,\;\chi_{h.h}(s) = \cos^t \widehat{sx}\,,$$

$$\chi_{h.h+1}(s) = \binom{t}{1}\cos^{t-1}\widehat{sx}\,.\cos\widehat{sy}\,,\ldots,\chi_{h.h+t}(s) = \cos^t\widehat{sy}\,,$$

$$\chi_{h.h+t+1}(s) = 0\,,\ldots,\chi_{h.i}(s) = 0\,;$$

quindi le equazioni integrali (21) ammetteranno almeno $\frac{i(i-1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti. Ora si può dimostrare, usando convenientemente dei teoremi α), δ) al § 6, che qualunque altra soluzione delle equazioni integrali (21) è sempre uguale ad una funzione lineare, omogenea ed a coefficienti costanti di queste $\frac{i(i-1)}{2}$ soluzioni; quindi il sistema (21)' ammette solo le $\frac{i(i-1)}{2}$ soluzioni scritte sopra; e per conseguenza, in virtù di un noto teorema di Fredholm, *condizione necessaria e sufficiente affinchè il* *sistema* (20) *ammetta una soluzione è che le funzioni* $a_t(s)$ *soddisfacciano alle relazioni*:

$$(5)' \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_C \sum_0^t {}_\tau\, a_{h+\tau}(s) \binom{t}{\tau} \cos^{t-\tau} \widehat{sx} \,.\, \cos^\tau \widehat{sy}\, ds = 0 \,. \\ (t = 1\,, 2\,, \ldots\,, i-1\ ;\ h = 1\,, 2\,, \ldots\,, i-t) \end{array} \right.$$

Ora queste condizioni sono necessarie, se si vuole che le $a_t(s)$ rappresentino i valori nei punti di C di un sistema di integrali delle equazioni (3), (4), considerate nell'area finita σ. Se le supponiamo soddisfatte, il sistema (20) ammetterà certamente una soluzione; ed è facile dimostrare, in virtù della (13), che *le i funzioni* $\Phi_h(\xi\,, \eta)$, *ottenute dalle* (15) *col mettere al posto delle* $\varphi_t(s)$ *questa soluzione, risolvono il sistema di equazioni* (A) *per l'area finita* σ, ossia risolvono il *problema interno*.

Risoluzione del problema esterno.

13. Consideriamo le equazioni:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle a_t(s_0) = -\sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t\tau}\, \varphi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t\tau}(s\,, s_0)\, \varphi_\tau(s)\, ds\,, \\ (t = 1\,, 2\,, \ldots\,, i) \end{array} \right.$$

e i due corrispondenti sistemi omogenei e coniugati:

$$(23) \qquad 0 = -\sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t\tau}\, \psi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t\tau}(s\,, s_0)\, \psi_\tau(s)\, ds,$$

$$(23)' \qquad 0 = -\sum_1^i {}_\tau\, \beta_{t\tau}\, \chi_\tau(s_0) + \frac{1}{\pi} \int_C \sum_1^i {}_\tau\, u'_{t\tau}(s_0\,, s)\, \chi_\tau(s)\, ds\,.$$

Anche a queste equazioni sono applicabili i risultati di Fredholm.

Intanto, in forza delle (12)′, si ha che il sistema (23) ammette le $\dfrac{i(i+1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti:

$$\psi_1^{(\rho,t)}(s) = 0\,, \ldots\,, \psi_{\rho-1}^{(\rho,t)}(s) = 0\,, \psi_\rho^{(\rho,t)}(s) = x^t\,, \psi_{\rho+1}^{(\rho,t)}(s) = \binom{t}{1} x^{t-1} y\,, \ldots\,,$$
$$\psi_{\rho+t-1}^{(\rho,t)}(s) = \binom{t}{t-1} x y^{t-1}\,, \psi_{\rho+t}^{(\rho,t)}(s) = y^t\,, \psi_{\rho+t+1}^{(\rho,t)}(s) = 0\,, \ldots\,, \psi_i^{(\rho,t)}(s) = 0\,;$$
$$(t = 0\,, 1\,, \ldots\,, i-1\ ;\ \varrho = 1\,, 2\,, \ldots\,, i-t)$$

e si può dimostrare che qualunque soluzione del sistema (23) è sempre uguale ad una funzione lineare omogenea ed a coefficienti costanti di queste

$\frac{i(i+1)}{2}$ soluzioni; sicchè il sistema (23)' ammetterà solo $\frac{i(i+1)}{2}$ soluzioni linearmente indipendenti $\chi_1^{(\rho,t)}(s)$, $\chi_2^{(\rho,t)}(s)$, ..., $\chi_i^{(\rho,t)}(s)$. Allora *condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema* (22) *ammetta una soluzione è che le funzioni* $a_t(s)$ *soddisfacciano alle* $\frac{i(i+1)}{2}$ *relazioni*:

$$(24) \qquad \int_C \sum_1^i{}_\tau\, a_\tau(s)\, \chi_\tau^{(\lambda,\mu)}(s)\, ds = 0 .$$

Supposte soddisfatte queste relazioni, il sistema (22) ammetterà una soluzione, e *le i funzioni* $\Phi_h(\xi, \eta)$, *ottenute dalle* (15) *col porre al posto delle* $\varphi_t(s)$ *questa soluzione, risolveranno il sistema di equazioni* (A) *per l'area infinita* σ'.

14. Se le $a_t(s)$ non soddisfano alle (24), si determinino $\frac{i(i+1)}{2}$ costanti $a_{\rho,t}$ in modo che, come si può sempre fare, le espressioni:

$$\overline{a}_h(s) = a_h(s) - \sum_{\rho,t} a_{\rho,t}\, u_h^{(\rho,t)}(s)$$

soddisfacciano alle (24). Come al § precedente si avrà un sistema di integrali $\overline{\Phi}_h(\xi, \eta)$ delle equazioni (3), (4) nell'area infinita σ', il quale nei punti di C coinciderà col sistema delle funzioni $\overline{a}_h(s)$; dimodochè *il sistema di funzioni*:

$$\overline{\Phi}_h(\xi, \eta) + \sum_{\rho,t} a_{\rho,t}\, u_h^{(\rho,t)}(\xi, \eta)$$

risolverà in ogni caso il sistema di equazioni (A) *per l'area infinita* σ'.

Matematica. — *Sull'equazione integrale di* 1ª *specie*. Nota del Corrispondente G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.