ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Da tutto ciò si deduce che:

$$\int_0^\infty d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda = \lim_{\substack{\nu=\infty\\ \mu=0}} \int_\mu^\nu d\alpha \int_a^\infty \psi(\lambda)\cos\varrho\lambda\cos\alpha\lambda\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \lim_{\varepsilon=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho-\varepsilon)\lambda\, d\lambda - \lim_{\mu=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu+\varrho)\lambda\, d\lambda +$$

$$+ \lim_{\nu=\infty}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu+\varrho)\lambda\, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(2\varrho+\varepsilon')\lambda\, d\lambda -$$

$$- \lim_{\varepsilon=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon\lambda\, d\lambda - \lim_{\mu=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\mu-\varrho)\lambda\, d\lambda +$$

$$+ \lim_{\nu=\infty}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin(\nu-\varrho)\lambda\, d\lambda - \lim_{\varepsilon'=0}\int_a^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\sin\varepsilon'\lambda\, d\lambda \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{ \frac{\psi(a)}{a}\,\frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a}\,\frac{\cos\varrho\xi - \cos\varrho a}{\varrho} -$$

$$- \frac{\psi(a)}{a}\,\frac{\cos 2\varrho\xi - \cos 2\varrho a}{2\varrho} - \frac{\psi(a)}{a}\,\frac{\cos\varrho\xi - \cos\varrho a}{-\varrho} \Big\} = 0\,.$$

Da questo resta stabilito che la funzione $\psi(\lambda)\cos\varrho\lambda$ è rappresentabile con la formula integrale di Fourier.

Con analogo procedimento si dimostra che anche $\psi(\lambda)\sin\varrho\lambda$ è rappresentabile con la stessa formula.

Applicando ora il criterio esposto nel mio citato lavoro si giunge facilmente alla formula (10) della nuova Nota del dott. Orlando sebbene i due metodi siano, come è facile vedere, essenzialmente diversi.

Fisica matematica. — *Sopra un problema di dinamica degli elettroni.* Nota del dott. L. Silla, presentata dal Socio Volterra.

Lo studio dei fenomeni luminosi che si osservano in un tubo di vetro contenente del gas rarefatto, percorso da scariche elettriche ed esposto all'azione di un campo magnetico, ha indotto il prof. Righi [1] a formulare l'ipotesi che quei fenomeni siano dovuti alla formazione di certi raggi, che egli denomina *raggi magnetici*, i quali sarebbero prodotti dal moto traslatorio di tanti sistemi elettricamente neutri, simili a stelle doppie, e formati ciascuno d'un ione positivo e d'un elettrone negativo. L'elettrone si muoverebbe, relativamente all'ione, alla stessa guisa d'un pianeta che graviti

(1) Cfr. A. Righi, *La materia radiante e i raggi magnetici*, Bologna, 1909; *Sul moto di un elettrone intorno ad un ione nel campo magnetico* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, t. XVII, 1908, pp. 675-681; Il Nuovo Cimento, t. XVII, 1° semestre 1909, pp. 195-202).

intorno al sole, con la differenza che la gravitazione è qui sostituita dalla forza elettrica.

Per sviluppare matematicamente la sua ipotesi, l'eminente fisico di Bologna prende in esame uno di tali sistemi elementari, o stelle doppie, in movimento e trova vantaggioso d'introdurre una semplificazione nel problema dinamico, limitandosi allo studio del moto relativo dell'elettrone rispetto al ione, che è concepito immobile o animato d'un semplice moto progressivo, ed ammettendo altresì che l'elettrone si muova in un piano normale al campo magnetico, il quale è supposto uniforme e costante.

Io mi propongo qui di fare un esame quantitativo delle equazioni stabilite dal prof. Righi, e d'integrare completamente quelle equazioni mediante le trascendenti ellittiche. Le conclusioni alle quali perverrò mi sembrano utili per giudicare entro quali limiti di velocità per l'elettrone si produca la stabilità dei sistemi binarî ione-elettrone considerati dal prof. Righi. Tuttavia dovrò limitarmi, in questi Rendiconti, ad un semplice riassunto dei calcoli, i quali saranno sviluppati più largamente altrove.

Riferendoci ad una coppia di assi cartesiani ortogonali, con l'origine nello ione, il moto piano dell'elettrone è definito dall'equazioni

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -h\dfrac{x}{r^3} - k\dfrac{dy}{dt}\,, \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -h\dfrac{y}{r^3} + k\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

x, y denotando le coordinate del mobile, $r = \sqrt{x^2+y^2}$ il raggio vettore ed h, k due costanti intimamente legate alla questione fisica che si studia. Si ha, infatti,

$$h = \alpha\frac{e^2}{m}\quad,\quad k = \gamma \mathrm{M}\frac{e}{m}\,,$$

dove α e γ sono rispettivamente le costanti che figurano nelle formole di Coulomb, sulle azioni elettrostatiche e di Biot e Savart, e indica il valore aritmetico della carica comune all'elettrone e allo ione, m la massa dell'elettrone ed M l'intensità del campo magnetico.

Le equazioni (1) sono valide, e calcolabili numericamente, in qualunque sistema di unità; siccome noi, nella presente Nota, ci riferiremo al sistema elettromagnetico assoluto c. g. s., assumeremo $\alpha = 9.10^{20}$ e $\gamma = 1$. Si ha poi $e = 10^{-20}$, $\dfrac{e}{m} = \dfrac{10^{-20}}{\frac{1}{2}10^{-27}} = 2.10^7$ ed $\mathrm{M} = 10^3$ unità, come nelle esperienze del prof. Righi. Quindi per h e k risultano i valori numerici seguenti

$$h = 2.10^8\ ,\ k = 2.10^{10}.$$

Il vettore che rappresenta l'accelerazione posseduta dall'elettrone allo istante t si può pensare risultante di due: l'uno d'intensità eguale ad $\frac{h}{r^2}$, diretto secondo il raggio vettore e che dipende dalla forza elettrica, l'altro normale alla velocità v dell'elettrone e d'intensità kv, dipendente dal campo magnetico. È utile di distinguere gli effetti che questi due vettori, separatamente, producono sul moto dell'elettrone.

Se consideriamo soltanto l'effetto prodotto dall'azione dello ione, il movimento sarà definito dalle equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -h\frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -h\frac{y}{r^3};$$

quindi, indicando ancora con v la velocità del mobile, si ottiene

$$v^2 = \frac{2h}{r} - b, \tag{2}$$

dove $-b$, come nelle notazioni del prof. Righi, denota la costante d'integrazione. Giova notare subito che il valore di v^2 è lo stesso di quello che somministrano le equazioni (1), ciò che era evidente a priori. Introducendo le condizioni iniziali, il valore di b rimane così definito

$$b = \frac{2h}{r_0} - v_0^2,$$

vale a dire la costante b dipende unicamente dagli elementi h, r_0 e v_0. Ora, nelle esperienze del prof. Righi, il valore medio della pressione del gas nel tubo è di 0,25 mm.; un calcolo semplice mostra che, in tali condizioni, la distanza molecolare è dell'ordine di 10^{-5} cm. D'altra parte, essendo 10^{-8} il diametro molecolare [1], potremo rappresentare r_0 con $10^{-\alpha}$, dove $8 > \alpha > 5$. Quanto a v_0, osserviamo che la velocità assoluta dello ione è dell'ordine di 10^7 cm.; quella dell'elettrone, invece, è dell'ordine di 4.10^9 cm. in media; potremo, pertanto, ancora supporre che la velocità relativa dell'elettrone, rispetto al ione, sia dell'ordine di 10^9 e risulterà, in conseguenza,

$$b = \frac{2.2.10^8}{10^\alpha} - 1{,}6.10^{19}.$$

Ma l'ultimo termine a secondo membro, in valore assoluto, prevale decisamente sul primo; epperò si ha $b < 0$. Dalla (2) risulta, quindi, che l'elettrone può allontanarsi indefinitamente dallo ione; in ogni caso l'elettrone

[1] Tolgo questi dati numerici dall'accurata monografia dell'ing. U. Bordoni, della R. Scuola degl'ingegneri di Roma. *Le basi sperimentali della teoria degli elettroni* (Pubblicazioni del Circolo fisico-matematico di Roma, 1909).

può, con velocità reale, superare la distanza intermolecolare (10^{-5} cm.), ove si assuma per v_0 il valore medio 4.10^9. Se si considerassero valori di v_0 dell'ordine di 10^6, o minori, sarebbe $b > 0$, come nel caso ammesso dal prof. Righi, con stabilità del sistema ione-elettrone.

Se si tiene ragione del solo effetto prodotto sul moto dell'elettrone dal campo magnetico, si hanno le equazioni

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt} \quad , \quad \frac{d^2y}{dt^2} = k\frac{dx}{dt} .$$

L'elettrone descriverebbe, intorno allo ione, un cerchio di raggio $R = \frac{v_0}{k} = = \frac{4.10^9}{M.2.10^7}$. Si riconosce quindi che l'azione del campo magnetico tende a rendere stabile il sistema ione-elettrone, ma per campi magnetici assai intensi. Invero R è inversamente proporzionale ad M, cioè all'intensità del campo; ora, per un campo di circa 10^3 unità, risulta R dell'ordine di 10^{-1} (= 1 millimetro), e ricordiamo che la distanza molecolare è dell'ordine di 10^{-5}.

Le precedenti riflessioni sono sufficienti per concludere che, nelle condizioni sperimentali ammesse, sono da distinguere tre ordini di grandezza possibili per la velocità dell'elettrone, che noi assumiamo come iniziale: una che può chiamarsi la *velocità critica* dell'elettrone, dell'ordine di 10^6 circa, le altre due l'una inferiore, l'altra superiore a 10^6. Per velocità iniziali eguali o inferiori alla velocità critica è certamente $b > 0$ e si hanno condizioni favorevoli per l'esistenza dei sistemi binarî ione-elettrone considerati dal prof. Righi, e, in tal caso, il campo magnetico favorisce la stabilità di quei sistemi. Per velocità superiori a quella critica, fra le quali la velocità media d'un elettrone ($= 4.10^9$), che noi qui consideriamo, è $b < 0$, e l'elettrone non può associarsi ad un ione in un sistema che si possa assimilare ai più semplici sistemi astrali, quali le stelle doppie.

Le equazioni (1) offrono però un esempio assai interessante di movimento nel quale l'uso delle trascendenti ellittiche, per la completa integrazione di quelle equazioni, si presta ad una esauriente discussione del problema meccanico e ci permette di provare che, nel moto dell'elettrone, mentre il raggio vettore descrive un angolo finito, a partire dalla posizione iniziale, il mobile si allontana dal ione d'una quantità assai superiore alla distanza molecolare.

Dalle (1) si ottengono facilmente due integrali, uno dei quali è già offerto dalla (2). Se introduciamo le variabili polari r e θ, i due integrali assumono la forma seguente

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2h}{r} - b \quad ; \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{k}{2} + \frac{a}{r^2} ,$$

con le costanti arbitrarie a e b. Eliminando θ si ottiene una relazione della forma $dt = \pm \frac{r\,dr}{\sqrt{\varphi(r)}}$, dove

$$\varphi(r) = -\frac{k^2}{4} r^4 - (b + ak) r^2 + 2hr - a^2,$$

dalla quale si può dedurre t in funzione di r, mediante un integrale ellittico. Ma a noi preme di esprimere r in funzione ellittica di t. Pertanto assimileremo il polinomio $\varphi(r)$ al polinomio generale del 4° grado $a_0 r^4 + 4a_1 r^3 + 6a_2 r^2 + 4a_3 r + a_4$, prendendo

$$(3) \qquad a_0 = -\frac{k^2}{4}, \; a_1 = 0, \; a_2 = -\frac{b + ak}{6}, \; a_3 = \frac{h}{2}, \; a_4 = -a^2.$$

Indicando, poi, con u e v due argomenti ellittici, poniamo, d'accordo con la teoria generale [1],

$$r = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\frac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v} = \frac{1}{2}\frac{\wp'u - \wp'v}{\wp u - \wp v}.$$

La u è funzione del tempo t, la v è costante ed è definita in valore e segno dalle equazioni

$$(4) \qquad \wp v = -\frac{a_2}{a_0}, \; \wp' v = \frac{a_3}{a_0}.$$

Se immaginiamo costruita la funzione ellittica $\wp u$, con gl'invarianti g_2 e g_3, questi sono esprimibili con i coefficienti del polinomio $\varphi(r)$. Per il calcolo numerico di g_2 e g_3 occorre quindi d'introdurre in (3) i dati sperimentali riportati innanzi e il valore di a, desunto dall'equazione

$$a = r_0^2\left(\theta'_0 - \frac{k}{2}\right).$$

Supporremo r_0 eguale a 10 diametri molecolari, quindi dell'ordine di 10^{-7}. Quanto a θ'_0 il calcolo assegna a θ', velocità angolare dell'elettrone, un valore dell'ordine di 10^{15} circa, beninteso ove si tratti d'una frequenza tale che le radiazioni emesse ci appariscano luminose. Conviene perciò assumere $\theta'_0 = 10^\lambda$, con $15 > \lambda > 0$. Se si forma una tabella dei valori di a e di $b + ak$, corrispondenti a quelli di λ, compresi nell'intervallo $0, 15$, si troverà in ogni caso $b + ak < 0$. Calcolati inoltre, g_2 e g_3 si trova

$$g_2 > 0, \; g_3 > 0, \; \Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2 > 0;$$

quindi si conclude che dei due semiperiodi ω ed ω' della funzione $\wp u$, il

[1] Ved. per esempio, P. Appell e E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques*. Paris, 1897.

primo è reale ed il secondo è un immaginario puro. Posto, inoltre, $s = \wp u$, l'equazione cubica

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0$$

ha tutte e tre le radici reali; le rappresenteremo con e_1, e_2, e_3 e supporremo $e_1 > e_2 > e_3$.

Per le (4) si ha poi

$$\wp v = -\frac{2}{3}\frac{b + ak}{k^2} > 0 \quad , \quad \wp' v = -2\frac{h}{k^2} < 0 .$$

L'argomento v è dunque reale ed è compreso fra zero ed ω; potremo scrivere, indicando con ε una quantità positiva,

$$v = \omega - \varepsilon .$$

Il polinomio $\varphi(r)$ ha le sue quattro radici reali. Invero, affinchè ciò si verifichi, devono contemporaneamente essere soddisfatte le condizioni

$$a_1^2 - a_0 a_2 > 0 \quad ; \quad 12(a_1^2 - a_0 a_2)^2 - \mathrm{S} a_0^2 > 0 ,$$

dove

$$\mathrm{S} = a_0 a_4 - 4 a_1 a_3 + 3 a_2^2 .$$

Nel caso nostro, come si verifica facilmente, queste condizioni sono soddisfatte; quindi, tenuto conto che $a_0 < 0$, l'argomento u deve avere una delle due forme seguenti

$$u_1 = -\frac{v}{2} + \alpha \quad , \quad u_2 = -\frac{v}{2} + \omega + i\alpha ,$$

con α variabile da 0 ad $\frac{\omega'}{i}$. In corrispondenza si hanno, per il raggio vettore r, i due valori

$$r_1 = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp v} \quad , \quad r_2 = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + \omega + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + \omega + i\alpha\right) - \wp v} .$$

Una breve discussione mostrerà che $r_1 > 0$ e $r_2 < 0$. La soluzione r_2 va quindi rifiutata e rimane per r il solo valore possibile

$$r = \frac{1}{2}\frac{\wp'\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp' v}{\wp\left(-\frac{v}{2} + i\alpha\right) - \wp v} .$$

Questo valore ammette un minimo ed un massimo, corrispondentemente ad $\alpha = \frac{\omega'}{i}$ ed $\alpha = 0$. Detto R il valore massimo si ha

$$R = -\frac{1}{2} \frac{\wp' \frac{v}{2} + \wp' v}{\wp \frac{v}{2} - \wp v} = \sqrt{\wp \frac{v}{2} + \wp \frac{v}{2} + \wp v}\,.$$

Ora R è assai grande; cerchiamo di calcolarlo in prima approssimazione. Poichè $\wp' v = -10^{-12}$, possiamo assumere, in una prima approssimazione, $v = \omega$. Inoltre, essendo Δ assai piccolo, sarà sensibilmente $e_2 = e_3 = -\frac{1}{2} e_1$. Ciò posto, nella formula per l'addizione di un semiperiodo ω all'argomento di $\wp u$, facciamo $u = -\frac{\omega}{2}$; si ricavano per $\wp \frac{v}{2}$ i due valori $e_1 \pm \frac{3}{2} e_1$. Ma il secondo è da rifiutarsi, perchè risulterebbe $\wp \frac{v}{2} < 0$, mentre fra 0 ed ω la funzione $\wp u$ è positiva; quindi $\wp \frac{v}{2} = \frac{5}{2} e_1$. Ma $e_1 = 0{,}0268$ e $\wp\omega = e_1$; segue pertanto $R = \sqrt{6 e_1} = 4.10^{-1}$.

Esprimiamo ora u per t; dobbiamo porre

$$\frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = \frac{du}{\pm i \frac{k}{2}}\,,$$

e quindi

$$dt = r \frac{dr}{\sqrt{\varphi(r)}} = \pm \frac{1}{ik} \cdot \frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} du\,.$$

Per decidere del segno $\pm$, converremo di partire dal valor minimo del raggio vettore; in tal caso r crescerà con t mentre α decrescerà da $\frac{\omega'}{i}$ a 0. Ora, se $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, $du = i d\alpha$, quindi

$$\frac{dt}{du} = \frac{dt}{i d\alpha} = \frac{r}{\pm i \frac{k}{2}}\,.$$

Siccome α decresce, col crescere di t, converrà tenere il segno $-$; cioè si avrà

$$\frac{dt}{d\alpha} = -\frac{2r}{k}.$$

Dunque

$$t = -\frac{1}{ik} \left\{ \log \frac{\wp u - \wp v}{\sigma(u - v)} \sigma(u + v) - 2u\zeta v \right\} + \text{cost.}$$

Abbiamo supposto di computare il tempo dall'istante in cui r è minimo. Ma r è minimo per $\alpha = \frac{\omega'}{i}$; quindi se $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, per $t = 0$, avremo $u_0 = -\frac{v}{2} + \omega'$. Seguirà

$$t = -\frac{1}{ik}\left\{\log \frac{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+i\alpha\right)-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right)-\mathrm{p}v} \cdot \frac{\sigma\left(\frac{v}{2}+i\alpha\right)}{\sigma\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)} \cdot \frac{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+\omega'\right)}{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+i\alpha\right)} - 2(i\alpha-\omega')\zeta v\right\}.$$

Detto T il valore del tempo che decorre dal passaggio di r dal valore minimo al valor massimo, per avere T basterà fare $\alpha = 0$ nella precedente equazione e si troverà

$$\mathrm{T} = -\frac{1}{ik}\log \frac{\mathrm{p}\frac{v}{2}-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right)-\mathrm{p}v} \cdot \frac{\sigma\frac{v}{2}}{\sigma\left(\frac{v}{2}+\omega'\right)} \cdot \frac{\sigma\left(-\frac{3}{2}v+\omega'\right)}{\sigma\left(-\frac{3}{2}v\right)}\, e^{2\omega'\zeta v}.$$

Calcoliamo T in prima approssimazione, facendo $v = \omega$; si troverà

$$\mathrm{T} = \frac{\pi}{k} = 2\pi \,.\, 10^{-10}.$$

Il raggio vettore, dunque, crescerà fino alla grandezza dell'ordine di 10^{-1} in un tempo dell'ordine di 10^{-10}.

Ci rimane da esprimere l'anomalia θ per t. Si ha, intanto,

$$d\theta = dt\left(\frac{k}{2} + \frac{a}{r^2}\right);$$

donde, tralasciando per ora i limiti,

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{2a}{ik}\int\frac{du}{r} = \frac{k}{2}t - \frac{4a}{ik}\int\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}\,du.$$

Per il calcolo dell'integrale a secondo membro, bisogna decomporre in elementi semplici l'espressione $\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}$. Questa operazione che, come è noto, presenta sempre gravi difficoltà, conduce nel presente caso a sviluppi piuttosto laboriosi. Mi limiterò qui a riferire il procedimento del calcolo.

Si ha, intanto,

$$\frac{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v} = \frac{(\mathrm{p}u-\mathrm{p}v)(\mathrm{p}'u+\mathrm{p}'v)}{4(\mathrm{p}^3u-\mathrm{p}^3v)-g_2(\mathrm{p}u-\mathrm{p}v)} = \frac{\mathrm{p}'u+\mathrm{p}'v}{4\mathrm{p}^2u+4\mathrm{p}u\,\mathrm{p}v+4\mathrm{p}^2v-g_2}.$$

Si tratta di trovare le radici del denominatore. Ora

$$4\wp^2 u + 4\wp u\,\wp v + 4\wp^2 v - g_2 = 4\left\{\wp u - \frac{-\wp v + \frac{2a}{k}}{2}\right\}\left\{\wp u - \frac{-\wp v - \frac{2a}{k}}{2}\right\}$$
$$= 4(\wp u - \wp l)(\wp u - \wp m),$$

dove l ed m sono due argomenti ellittici definiti dall'equazioni

$$2\wp l = -\wp v + \frac{2a}{k},$$

$$2\wp m = -\wp v - \frac{2a}{k}.$$

Sostituendo, risulta

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{a}{ik}\int \frac{\wp' u + \wp' v}{(\wp u - \wp l)(\wp u - \wp m)}\,du.$$

Ora, posto

$$\frac{1}{(\wp u - \wp l)(\wp u - \wp m)} = \frac{A}{\wp u - \wp l} + \frac{B}{\wp u - \wp m},$$

si trovano

$$A = \frac{1}{\wp l - \wp m}\quad,\quad B = -\frac{1}{\wp l - \wp m}.$$

Onde, sostituendo ed integrando fra u_0 ed u, verrà

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{a}{ik(\wp l - \wp m)}\left[\log\frac{\wp u - \wp l}{\wp u - \wp m} + \frac{\wp' v}{\wp' l}\left\{\log\frac{\sigma(u-l)}{\sigma(u+l)} + 2u\zeta l\right\} + \right.$$
$$\left. + \frac{\wp' v}{\wp' m}\left\{\log\frac{\sigma(u-m)}{\sigma(u+m)} + 2u\zeta m\right\}\right]_{u_0}^{u}.$$

Ma $u = -\frac{v}{2} + i\alpha$, $u_0 = -\frac{v}{2} + \omega'$; quindi, fatte tutte le semplificazioni, si troverà

$$\theta = \frac{k}{2}t - \frac{1}{2i}\left[\log\frac{\wp\left(-\frac{v}{2}+i\alpha\right) - \wp l}{\wp\left(-\frac{v}{2}+i\alpha\right) - \wp m}\cdot\frac{\wp\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right) - \wp m}{\wp\left(-\frac{v}{2}+\omega'\right) - \wp l}\right.$$
$$-\log\frac{\sigma\left(-\frac{v}{2}+i\alpha-l\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2}+i\alpha+l\right)}\cdot\frac{\sigma\left(-\frac{v}{2}+i\alpha-m\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2}+i\alpha+m\right)}\cdot\frac{\sigma\left(-\frac{v}{2}+\omega'+l\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2}+\omega'-l\right)}\cdot$$
$$\left.\frac{\sigma\left(-\frac{v}{2}+\omega'+m\right)}{\sigma\left(-\frac{v}{2}+\omega'-m\right)} - 2(i\alpha - \omega')(\zeta l + \zeta m)\right].$$

Se in questa relazione si fa $\alpha = 0$, talchè T è il valore corrispondente di t, in prima approssimazione, per $v = \omega$, si troverà il valore Θ di θ corrispondente, cioè $\Theta = \pi$. Dunque l'elettrone si allontana, nel tempo T, d'una quantità dell'ordine di 10^{-1} ($= 1$ millimetro), mentre il raggio vettore si troverà girato d'un angolo finito.

Meccanica. — *Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques.* Nota di N. Kryloff (ingénieur des mines), presentata dal Socio U. Dini.

On est conduit, comme on sait, dans ce problème à considérer l'équation suivante aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \varphi(x)\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0,$$

à laquelle on cherche à satisfaire par un mouvement pendulaire d'amplitude variable y:

$$W = y(x)\ \cos t\sqrt{k},$$

en déterminant convenablement la fonction $y(x)$ et le paramètre k, ce qui nous amène (la verge étant encastrée par ses deux bouts) à étudier la possibilité du développement des fonctions, dites arbitraires, d'une variable réelle, suivant les solutions doublement tangentes à l'axe OX, aux points a et b, de l'équation différentielle du 4^{me} ordre:

$$(1) \qquad \frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)\,y.$$

L'existance effective des valeurs, dites singulières, de k, c. à. d. telles qu'à chaque valeur singulière k_i correspond une fonction $\varphi_i(x)$ vérifiant le (1) avec les conditions initiales et finales $\varphi_i(x) = 0$ ainsi que $\varphi_i'(x) = 0$ pour $x = a$ et $x = b$ a été l'objet des recherches de M. Davidouglou, qui dans sa thèse (1905) a établi par une voie peut-être un peu longue, la possibilité du développement suivant les fonctions $\varphi_i(x)$, moyennant les conditions, que la fonction $f(x)$, dont il s'agit à développer, ne possède que les 4 premieres dérivées. C'était du reste aussi la condition de M. Myller, qui de son côté s'est occupé de la question dans sa thèse, au point de vue des équations intégrales. Or, il parait, qu'on peut arriver plus directement à démontrer la possibilité du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ suivant les $\varphi_i(x)$, en suivant la méthode ingénieuse et profonde de M. Picard (cours de cette année à la Sorbonne) pour le cas du développement suivant