ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

Se in questa relazione si fa $\alpha = 0$, talchè T è il valore corrispondente di t, in prima approssimazione, per $v = \omega$, si troverà il valore Θ di θ corrispondente, cioè $\Theta = \pi$. Dunque l'elettrone si allontana, nel tempo T, d'una quantità dell'ordine di 10^{-1} (= 1 millimetro), mentre il raggio vettore si troverà girato d'un angolo finito.

Meccanica. — *Sur le problème des vibrations transversales des verges élastiques.* Nota di N. Kryloff (ingénieur des mines), presentata dal Socio U. Dini.

On est conduit, comme on sait, dans ce problème à considérer l'équation suivante aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \varphi(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 ,$$

à laquelle on cherche à satisfaire par un mouvement pendulaire d'amplitude variable y:

$$W = y(x) \cos t \sqrt{k} ,$$

en déterminant convenablement la fonction $y(x)$ et le paramètre k, ce qui nous amène (la verge étant encastrée par ses deux bouts) à étudier la possibilité du développement des fonctions, dites arbitraires, d'une variable réelle, suivant les solutions doublement tangentes à l'axe OX, aux points a et b, de l'équation différentielle du 4^{me} ordre:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = k\varphi(x)\, y . \tag{1}$$

L'existance effective des valeurs, dites singulières, de k, c. à. d. telles qu'à chaque valeur singulière k_i correspond une fonction $\varphi_i(x)$ vérifiant le (1) avec les conditions initiales et finales $\varphi_i(x) = 0$ ainsi que $\varphi_i'(x) = 0$ pour $x = a$ et $x = b$ a été l'objet des recherches de M. Davidouglou, qui dans sa thèse (1905) a établi par une voie peut-être un peu longue, la possibilité du développement suivant les fonctions $\varphi_i(x)$, moyennant les conditions, que la fonction $f(x)$, dont il s'agit à développer, ne possède que les 4 premieres dérivées. C'était du reste aussi la condition de M. Myller, qui de son côté s'est occupé de la question dans sa thèse, au point de vue des équations intégrales. Or, il parait, qu'on peut arriver plus directement à démontrer la possibilité du développement d'une fonction arbitraire $f(x)$ suivant les $\varphi_i(x)$, en suivant la méthode ingénieuse et profonde de M. Picard (cours de cette année à la Sorbonne) pour le cas du développement suivant les solutions de l'équation différentielle du 2e ordre: $\frac{d^2y}{dx^2} = k\varphi(x)\, y$, où de plus $\varphi_i(x)_{\substack{x=a\\x=b}} = 0$.

La généralisation de la méthode de M. Picard, basée sur un théorème de convergence de M. Schmidt, peut se faire comme il suit:

D'après Schmidt on a la série absolument et uniformément convergente:

$$\sum_n \int_a^x \Phi_n(z)\, dz \int_a^b \psi(x)\, \Phi_n(x)\, dx\,, \tag{2}$$

où $\psi(x)$ est continue et $\int_a^b \Phi_m(x)\, \Phi_n(x)\, dx = \begin{matrix} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = 1 \end{matrix}$

Posons ici

$$\varphi_n'(x) = \int_a^x \Phi_n(z)\, dz; \text{ c. à. d. } \varphi_n''(x) = \Phi_n(x) \text{ et } \psi(x) = f''(x).$$

Alors (2) s'écrit:

$$\sum_n \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Je dis que (3) réprésente $f'(x)$ si les conditions, qui vont être énoncées, sont vérifiés. En effet multiplions les deux parties de (4) par $\varphi_n'''(x)$ et intégrons entre a et b:

$$f'(x) - \sum \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx = \mathrm{F}(x)\,. \tag{4}$$

On obtient:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = \int_a^b f'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx - \sum_n \int_a^b \varphi_n'(z)\, \varphi_m'''\, dx \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx.$$

Or:

$$\int_a^b f'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = \left| f'(x)\, \varphi_m''(x) \right|_a^b - \int_a^b f''(x)\, \varphi_m''(x)\, dx = -$$

$$- \int_a^b f''(x)\, \varphi_m''(x)\, dx \text{ si } f'(x) = 0 \text{ pour } \begin{matrix} x = a \\ x = b \end{matrix},$$

et

$$\int_a^b \varphi_n'(x)\, \varphi_m'''(x)\, dx = \left| \varphi_n(x)\, \varphi_m'''(x) \right|_a^b - \int_a^b \varphi_n\, \varphi_m^{\mathrm{IV}}\, dx = \begin{matrix} -1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix},$$

$$\text{car } \varphi_n(x) = 0 \text{ pour } x \begin{matrix} = a \\ = b \end{matrix}.$$

De plus $\varphi_m^{\mathrm{IV}} = k\varphi_m(x)\, \varphi(x)$ et $\int_a^b k\varphi(x)\, \varphi_m(x)\, \varphi_n(x) = \begin{matrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix}$, comme on le sait (Rg. thèse, Davidouglou).

Donc on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\, \varphi_n'''(x)\, dx = -\int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx + \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx = 0;$$

donc de l'égalité:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\, \varphi_n'''(x)\, dx = 0 \quad (\text{pour } n = 1,2,\ldots \infty)$$

on tire, que $\mathrm{F}(x) \equiv 0$, si le système $\varphi_n'''(x)$ est fermé; la possibilité du développement de $f'(x)$ suivant les $\varphi_n'(x)$ sera donc démontré, moyennant toutes les conditions mentionnées. On a donc la série:

$$\sum_n \varphi_n'(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx\,,$$

dont les termes sont fonctions de x finies et intégrables entre a et b, et qui est uniformement convergente dans l'intervalle ab; alors sa somme, que nous avons démontrée tout à l'heure être $f'(x)$, sera intégrable entre a et b, et la série

$$\sum_n \int_a^x \varphi_n'(x)\, dx \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx = \sum_n \varphi_n(x) \int_a^b f''(x)\, \varphi_n''(x)\, dx$$

(car $\varphi_n(a) = 0$), sera uniformément convergente entre a et b et aura pour la somme

$$\int_a^x f'(x)\, dx = f(x)$$

(Dini, *Calcolo integrale*, pp. 143-145). Donc on a le

Théoreme: Toute fonction continue, s'annulant pour $x = a$ et $x = b$, c. à. d. telle que $f(a) = f(b) = 0$ se développe en série absolument et uniformement convergente des fonctions $\varphi_n(x)$ entre a et b, pourvu que: 1°) la 1re et la 2e dérivée de $f(x)$ c. à. d. $f'(x)$ et $f''(x)$ soient continues; 2°) $f'(a) = f'(b) = 0$ ainsi que $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$; $\varphi_n'(a) = \varphi_n'(b) = 0$ quelque ce soit n; 3°) la suite de $\varphi_n''(x)$ est orthogonale et normale c. à. d.

$$\int_a^b \varphi_n''(x)\, \varphi_m''(x)\, dx = \begin{matrix} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ si } m \neq n \end{matrix};$$

4°) la suite de $\varphi_n'''(x)$ forme un système fermé.

Or il est aisé de voir, que les fonctions $\varphi_n(x)$ intervenants dans le problème en question, c. à. d. telles que $\dfrac{d^4\varphi_n(x)}{dx^4} = k\varphi_n(x)\,\varphi(x)$, vérifient les conditions du théoreme précédent; en effet:

1°) L'existence éffective des valeurs singulières k_n à été établie aux conditions: $\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$; $\varphi'_n(a) = \varphi'_n(b) = 0$.

2°) L'intégration par parties donne:

$$\int_a^b \varphi''_n(x)\,\varphi''_m(x)\,dx = |\,\varphi'_n(x)\,\varphi''_m(x)\,dx\,|_a^b -$$

$$-\int_a^b \varphi'_n(x)\,\varphi'''_m(x)\,dx = -\,|\,\varphi_n(x)\,\varphi'''_m(x)\,dx\,|_a^b + \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi^{\mathrm{IV}}_m(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \varphi_n(x)\,\varphi_m(x)\,k\varphi(x) = \frac{1 \text{ si } m = n}{0 \text{ si } m \neq n}\,;$$

donc le 2°) du théoréme précédent est rempli.

3°) En suivant le chemin, tracé par M. Picard (dans le cas de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = k\varphi(x)\,y)$, on démontrera, que les conditions

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi'''_n(x)\,dx = 0 \quad (n = 1\,,2\,...\,\infty)\,,$$

dans le cas de l'éxistence éffective de la fonction $\mathrm{F}(x)$, intégrable entre a et b (comme elle est dans notre cas cette fonction $\mathrm{F}(x)$), aboutissent à une contradiction. En effet, on a:

$$\int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi'''_n(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}\left[\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right]\varphi'''_n(x)\,dx =$$

$$= \left\{\left|\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right|\,\varphi'''_n(x)\right\}_a^b - \int_a^b \left\{\int_a^x \mathrm{F}(x)\,dx\right\}\varphi^{\mathrm{IV}}_n(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \psi(x)\,\varphi_n(x)\,dx\,.$$

Donc tout révient à démontrer que le systéme de $\varphi_n(x)$ est fermé; c. à. d.

$$(5) \qquad \int_a^b \mathrm{F}(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0$$

pour $n = 1\,,2\,...\,\infty$ entraîne $\mathrm{F}(x) \equiv 0$.

Supposons le contraire et envisageons l'équation:

$$(6) \qquad \frac{d^4y}{dx^4} = k\varphi(x)\,y + \mathrm{F}(x)\,;$$

alors les conditions (5) entraînent (Davidouglou, *Thèse*, pp. 39-40) que l'intégrale $y(x)$ de (6), qui touche OX aux points a et b, n'a pas de pôles, c. à. d. répresente une fonction entière, dont le rayon de convergence est infini; d'autre part on peut étudier le cercle de convergence de

$$(7) \qquad y = y_0 + ky_1 + \cdots + k^n y_n + \cdots$$

par la considération du rapport $\frac{\mathrm{U}_n}{\mathrm{U}_{n-1}}$ où $\mathrm{U}_n = \int_a^b y_0(x)\,y_n(x)\,\varphi(x)\,dx$. La présence de $F(x)$ ne modifie pas l'éssence du raisonnement; on substitue (7) dans (6) et en égalant les coéficients de diverses puissances de λ on obtient:

$$\frac{d^4 y_0}{dx^4} = F(x) \; ; \; \frac{d^4 y_1}{dx^4} = \varphi(x)\, y_0 \; ; \ldots$$

avec les conditions:

$$y_n(a) = y_n(b) = 0 \;\; ; \;\; y'_n(a) = y'_n(b) = 0 \, .$$

Alors la série

$$\Phi(k) = \int_a^b \varphi(x)\, y_0 \, \{ y_0 + k y_1 + \cdots k_n y_n + \cdots \} \, dx = U_0 + U_1 k + \cdots U_n k^n + \cdots$$

où toutes les U_n sont positives et telles que

$$0 < \frac{U_1}{U_0} < \frac{U_2}{U_1} < \cdots < \frac{U_n}{U_{n-1}} < \ldots ,$$

donne (Davidouglou, Ibid., pag. 73) $\dfrac{1}{k_1} = \lim \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$, où k_1 = rayon de convergence de (7).

Donc on arrive à une contradiction, car $F(x)$, n'étant pas identiquement nul, y_0 n'est pas $\equiv 0$, ainsi que toutes les y_n consécutives. Donc toutes les U_n sont > 0 et les rapports $\dfrac{U_n}{U_{n-1}}$ sont des nombres déterminés; la limite de $\dfrac{U_n}{U_{n-1}}$ pour $n = \infty$ existe et est > 0. D'autre part, cette limite, étant égale à l'inverse du rayon de convergence de la série (7) (qui est entière), devrait être égale à zéro, et cela ne se peut. Donc le théorème est démontré. La méthode précédente a l'avantage, d'après ce qu'il parait, de n'exiger d'autre restrictions, imposées à la fonction continue, dont il s'agit à développer, *que la continuité de ses deux premières dérivées* [1].

[1] En corrigeant les épreuves, j'ai appris de M. Piccone, qu'il va publier dans les « Annales de l'École Normale de Pise » un travail où il arrive par une voie toute différente (basée sur la th. des équations intégrales) au même résultat.