ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 1° agosto 1909.

Matematica. — *Sull'equazione integrale di 1ª specie.* Nota del Corrispondente G. Lauricella.

In una recente Nota dei Comptes rendus (14 Juin 1909) Picard, utilizzando un notevole risultato di Riesz (Göttingen Nachrichten, 1907), stabilisce l'importante teorema che *condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione integrale di 1ª specie*

$$g(s)=\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,h(t)\,dt \tag{1}$$

a funzione caratteristica (*Kern*) *chiusa*, ossia tale che l'equazione

$$0=\int_a^b \mathrm{K}(s\,,t)\,\theta(s)\,ds \tag{2}$$

non è verificata per alcuna funzione $\theta(s)$, *abbia una soluzione, è che la serie*

$$\sum_\nu \lambda_\nu^2\,d_\nu^2=\sum_\nu \lambda_\nu^2\left\{\int_a^b g(t)\,\varphi_\nu(t)\,dt\right\}^2 \tag{3}$$

sia convergente.

Le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ formano la *serie delle costanti* della funzione caratteristica $K(s, t)$; le funzioni

$$\varphi_1(s), \psi_1(s) \; ; \; \varphi_2(s), \psi_2(s) \; ; \ldots$$

formano la *serie delle coppie di funzioni ortogonali* della medesima $K(s, t)$.

Circa un anno fa avevo notato (¹), come conseguenza di un risultato di Schmidt (²), che

α) *se l'equazione* (1) *ammette una soluzione, la funzione* $g(s)$ *deve necessariamente avere la forma*:

$$g(s) = \sum_\nu d_\nu \varphi_\nu(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g(r) \varphi_\nu(r) \, dr \; ; \tag{4}$$

ed in una successiva Nota (³) avevo aggiunto che

β) *se l'equazione* (1) *ammette una soluzione* $h(t)$, *tale che il suo quadrato* $\{h(t)\}^2$ *sia una funzione atta all'integrazione nel campo* (a, b), *la serie* (3) *sarà convergente.*

2. Si osservi che *soltanto* nel caso di una *funzione caratteristica chiusa* la condizione α) è inclusa nella condizione β); ed invero, mentre dalla convergenza della serie (3) segue in ogni caso la convergenza assoluta ed uniforme della serie al secondo membro della (4), avviene *soltanto* nel caso di una *funzione caratteristica chiusa* che questa serie rappresenta certamente la funzione $g(s)$; infatti sussiste il seguente teorema (⁴):

γ) *se la funzione caratteristica* $K(s, t)$ *è tale,* o meglio *se la corrispondente serie di funzioni* $\varphi_\nu(s)$ *è tale che la serie al secondo membro della* (4), *quando converge ed è integrabile termine a termine, rappresenta certamente la funzione* $g(s)$, *si ha che non esistono soluzioni dell'equazione* (2); *e viceversa.*

Adunque le condizioni necessarie α) e β) in generale sono distinte; ed ora dimostreremo, usufruendo dell'accennato risultato di Riesz (⁵), appunto come fa Picard, che *le condizioni* α), β) *sono anche sufficienti.*

(¹) Vedi il § 3₁ della mia Nota: *Sopra alcune equazioni integrali.* Questi Rendiconti, 21 giugno 1908.

(²) Math. Ann., Bd. LXIII, Heft 4.

(³) *Sulle vibrazioni delle piastre elastiche incastrate.* Art. I, § 2. Questi Rendiconti, 6 settembre 1908.

(⁴) Vedi la mia cit. Nota: *Sopra alcune equazioni integrali,* § 6.

(⁵) Più opportunamente basterebbe applicare un teorema sulla *convergence en moyenne* del sig. E. Fischer (Comptes rendus, 13 mai 1907, pag. 1023), il quale dimostra in altro modo il teorema di Riesz.

Infatti dalla convergenza della serie (3) risulta, in virtù del teorema di Riesz, l'esistenza di almeno una funzione $h(t)$, integrabile insieme al suo quadrato $\{h(t)\}^2$ nel campo (a, b), e tale che

$$\lambda_\nu d_\nu = \int_a^b h(t)\, \psi_\nu(t)\, dt \,. \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Posto:

$$g_1(s) = \int_a^b \mathrm{K}(s, t)\, h(t)\, dt \,, \tag{5}$$

dovrà aversi, applicando a questa equazione integrale la condizione α),

$$g_1(s) = \sum_\nu \varphi_\nu(s) \int_a^b g_1(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr \,;$$

e poichè (cfr. Picard, loc. cit.)

$$\int_a^b g_1(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr = \int_a^b g(r)\, \varphi_\nu(r)\, dr \,, \tag{6}$$

risulterà, in virtù della (4),

$$g(s) = g_1(s) \,,$$

come si voleva dimostrare. Quindi si può enunciare il seguente teorema:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione integrale (1) *ammetta una soluzione $h(t)$, atta all'integrazione insieme al suo quadrato $\{h(t)\}^2$ nel campo (a, b), è che la serie* (3) *sia convergente e la funzione data $g(s)$ sia esprimibile mediante la serie* (4).

3. Questo teorema può mettersi sotto un'altra forma, la quale può riuscire utile nelle applicazioni.

A tal fine indichiamo con

$$\theta_1(t) \,,\, \theta_2(t) \,, \ldots \tag{7}$$

le eventuali soluzioni diverse da zero dell'equazione (2), ossia le eventuali funzioni per le quali si ha:

$$\int_a^b \theta(t)\, \varphi_\nu(t)\, dt = 0 \,; \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

e si osservi che, se l'equazione (1) ammette una soluzione, si deve necessariamente avere:

$$\int_a^b g(s)\, \theta_\nu(s)\, ds = 0 \tag{8}$$

per tutti i possibili valori di ν.

Ora vogliamo dimostrare che *la convergenza della serie* (3) *e le condizioni* (8) *sono sufficienti per l'esistenza di una soluzione almeno dell'equazione* (1). Infatti dalla convergenza della serie (3) risulta, come si è detto, l'esistenza di una funzione $h(t)$ tale che, scritta la (5), si avrà la (6), ossia si avrà per qualunque valore dell'indice ν:

$$\int_a^b \{ g(r) - g_1(r) \} \varphi_\nu(r)\, dr = 0 .$$

Di qui risulta che l'espressione $g(r) - g_1(r)$ o è identicamente nulla, o coincide, a meno di un coefficiente costante B, con una delle funzioni (7), ossia:

$$(9) \qquad g(r) - g_1(r) = B\theta_l(r) .$$

Per altro dalla (5) segue per tutti i possibili valori di ν

$$(8)' \qquad \int_a^b g_1(s)\, \theta_\nu(s)\, ds = 0 ;$$

e quindi ancora:

$$\int_a^b \{ g(s) - g_1(s) \} \theta_\nu(s)\, ds = 0 .$$

Questa ci darà nell'ipotesi (9):

$$0 = \int_a^b \{ g(s) - g_1(s) \} \theta_l(s)\, ds = \frac{1}{B} \int_a^b \{ g(s) - g_1(s) \}^2\, ds ;$$

e così si avrà in ogni caso:

$$g_1(s) = g(s) .$$

Adunque *condizione necessaria e sufficiente, affinchè l'equazione integrale* (1) *ammetta una soluzione almeno, la quale sia atta all'integrazione nel campo* (a, b) *insieme al suo quadrato, è che la serie* (3) *sia convergente e che la funzione data* $g(s)$ *soddisfaccia alle condizioni* (8).

4. Rammentiamo qui, conformemente a quanto fu stabilito al § 6_1 della mia citata Nota: *Sopra alcune equazioni integrali*, che, *se* $h(t)$ *è una soluzione dell'equazione integrale* (1), *e* $\chi(t)$ *una funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo* (a, b) *e tale che la serie*

$$\sum_\mu \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\, \psi_\mu(r)\, dr ,$$

moltiplicata per K(s, t) *oppure per* $\psi_\nu(t)$ *con* ν *qualsiasi, sia integrabile termine a termine, la soluzione più generale dell'equazione* (1) *sarà data dall'espressione:*

$$h(t) + \chi(t) - \sum_\mu \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\, \psi_\mu(r)\, dr\,.$$

Meccanica — *Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque.* Nota di L. S. Da Rios, presentata dal Socio Levi-Civita.

Dopo i celebri lavori di Helmholtz e di William Thomson (lord Kelvin) sulla teoria generale dei vortici, il movimento d'un anello circolare vorticoso infinitamente sottile fu oggetto dello studio di valenti autori inglesi. Il criterio posto a fondamento della loro ricerca consiste nel riguardare l'anello come una linea geometrica. Si desume poi la velocità in un punto dell'anello da quella spettante ad un punto del campo irrotazionale infinitamente vicino al punto suddetto.

In una mia Memoria (1), ho generalizzato notevolmente una tale ricerca considerando il caso d'un filetto vorticoso di forma qualunque. Indi, per avere la velocità in un punto O di esso, ricercai la velocità in un punto generico P del liquido e ne trovai il valore asintotico all'avvicinarsi indefinito di P ad O. In base a questo primo valore, previe opportune considerazioni d'indole fisica, ottenni per la velocità in O un risultato che. nel caso speciale dell'anello circolare, è in perfetto accordo con quello già da molto tempo conosciuto.

Questo procedimento presta il fianco a qualche obbiezione circa il modo con cui il problema fisico è tradotto analiticamente. Infatti, mentre è indubbiamente lecito assimilare un filetto sottilissimo ad una linea vorticosa quando il punto potenziato ne è a distanza finita, non è detto senz'altro che ciò valga quando il punto in discorso gli si avvicini indefinitamente. È per questo che il prof. Weingarten nella sua Nota (2): *Zur Theorie der Wirbelringe*, ricercò il valore della velocità in un punto interno di un anello circolare, considerandolo inizialmente di sezione finita, e passando poi al limite.

Seguendo il criterio del Weingarten, si ritrovano precisate e generalizzate le conclusioni a cui giunsi precedentemente. Di tale studio mi permetto

(1) V. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXII, 1906, *Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque.*

(2) Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1907.