ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

moltiplicata per $K(s, t)$ *oppure per* $\psi_\nu(t)$ *con* ν *qualsiasi, sia integrabile termine a termine, la soluzione più generale dell'equazione* (1) *sarà data dall'espressione:*

$$h(t) + \chi(t) - \sum_\mu \psi_\mu(t) \int_a^b \chi(r)\, \psi_\mu(r)\, dr\,.$$

Meccanica — *Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque.* Nota di L. S. Da Rios, presentata dal Socio Levi-Civita.

Dopo i celebri lavori di Helmholtz e di William Thomson (lord Kelvin) sulla teoria generale dei vortici, il movimento d'un anello circolare vorticoso infinitamente sottile fu oggetto dello studio di valenti autori inglesi. Il criterio posto a fondamento della loro ricerca consiste nel riguardare l'anello come una linea geometrica. Si desume poi la velocità in un punto dell'anello da quella spettante ad un punto del campo irrotazionale infinitamente vicino al punto suddetto.

In una mia Memoria [1], ho generalizzato notevolmente una tale ricerca considerando il caso d'un filetto vorticoso di forma qualunque. Indi, per avere la velocità in un punto O di esso, ricercai la velocità in un punto generico P del liquido e ne trovai il valore asintotico all'avvicinarsi indefinito di P ad O. In base a questo primo valore, previe opportune considerazioni d'indole fisica, ottenni per la velocità in O un risultato che, nel caso speciale dell'anello circolare, è in perfetto accordo con quello già da molto tempo conosciuto.

Questo procedimento presta il fianco a qualche obbiezione circa il modo con cui il problema fisico è tradotto analiticamente. Infatti, mentre è indubbiamente lecito assimilare un filetto sottilissimo ad una linea vorticosa quando il punto potenziato ne è a distanza finita, non è detto senz'altro che ciò valga quando il punto in discorso gli si avvicini indefinitamente. È per questo che il prof. Weingarten nella sua Nota [2]: *Zur Theorie der Wirbelringe*, ricercò il valore della velocità in un punto interno di un anello circolare, considerandolo inizialmente di sezione finita, e passando poi al limite.

Seguendo il criterio del Weingarten, si ritrovano precisate e generalizzate le conclusioni a cui giunsi precedentemente. Di tale studio mi permetto

[1] V. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXII, 1906, *Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque.*

[2] Aus den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1907.

dare un cenno sommario nella presente Nota, riservandomi di esporre le dimostrazioni e i dettagli del calcolo in un lavoro successivo.

1. Si abbia un filetto $\mathcal{A}$ tutto ripieno di linee verticose $\mathfrak{L}$, immerso in un liquido indefinito, animato, in tutti i punti esterni a $\mathcal{A}$, da moto irrotazionale. Sia $\mathfrak{T}$ l'imagine geometrica d'una determinata linea vorticosa, che chiameremo *direttrice* del tubetto, in quanto essa ne caratterizza la configurazione longitudinale. Si considerino poi le sezioni trasversali di $\mathcal{A}$ che si ottengono conducendo per i successivi punti della $\mathfrak{T}$ dei piani ad essa normali. In particolare si consideri la sezione τ corrispondente ad un certo punto P della direttrice, assunto come origine degli archi contati su $\mathfrak{T}$ nel modo consueto. Inoltre si assuma come sistema di riferimento $P(xyz)$ il triedro principale in P relativo alla curva $\mathfrak{T}$, la direzione positiva dell'asse Px (cioè della tangente in P alla direttrice) coincidendo con quella del vortice ω in P stesso. Siano poi Q ed O due punti generici di τ; si designi con ε la distanza $\overline{QO}$ e con c la curvatura in P della direttrice. Se P_0 è il baricentro di τ, ed I indica la semi-intensità del tubetto, si trova che la velocità indotta in esso da tutto il tubo $\mathcal{A}$ ha per componenti rispetto al suddetto sistema:

$$(1)\qquad \begin{cases} U = 0, \\ V = 0, \\ W = -\dfrac{Ic}{2\pi}\dfrac{1}{\tau^2}\displaystyle\int_\tau d\tau \int_\tau \log\varepsilon\, d\tau_0; \end{cases}$$

con $\int d\tau$ designandosi l'integrazione rispetto al punto Q, e con $\int d\tau_0$ quella rispetto al punto generico O della sezione τ.

Le formole sopra riportate valgono in un ben determinato ordine di approssimazione [1]. Precisamente i valori esatti di U, V, W differiscono da quelli dati per termini che sono dell'ordine della sezione del tubo, e quindi asintoticamente trascurabili rispetto a valori di un ordine di grandezza superiore, come è quello spettante alla velocità di P_0.

2. Poichè la sezione del filetto si suppone piccolissima, il movimento di esso, nel suo aspetto generale, è assimilabile a quello d'una linea geometrica, i cui punti successivi abbiano per velocità quella d'un punto qualunque delle successive sezioni di $\mathcal{A}$. Giova individuare tale punto scegliendo il baricentro di esse. Con ciò il movimento di $\mathcal{A}$ è determinato da quello d'una linea ideale Γ, luogo dei predetti baricentri. I punti di questa, naturalmente, si confondono per un osservatore (posto a distanza finita) con quelli della $\mathfrak{T}$ situati sulla stessa seziono di $\mathcal{A}$, cosicchè possiamo identificare (nei riguardi del movimento) la Γ alla $\mathfrak{T}$. In altre parole, il moto

[1] Cfr. Levi-Civita. *Sulle azioni meccaniche dovute ad un flusso filiforme di elettricità*, in questi Rendiconti, vol. XVIII, serie 5ª, pp. 41-45.

di $\mathcal{A}$ potrà ritenersi determinato dal moto di $\mathfrak{T}$, ai punti di questa attribuendosi la velocità (1).

Se la sezione τ del tubetto è un cerchio di raggio ϱ, si ha in particolare, per la velocità del baricentro:

$$U = 0,$$
$$V = 0,$$
$$W = -\frac{I c}{2\pi} \log \varrho.$$

Se inoltre $\mathfrak{T}$ è una circonferenza di raggio r, la componente W risulta eguale a $-\frac{I \log \varrho}{2\pi r}$ [1].

Quanto abbiamo detto finora, vale a caratterizzare il moto di $\mathcal{A}$ come moto d'insieme; ma se badiamo, oltre che allo spostamento del baricentro P_0 della sezione τ, anche a quello d'un punto generico Q di essa, siamo indotti ad ammettere in τ un movimento intestino degno di nota. Infatti, β e γ designando i coseni direttori di ε nel piano di τ rispetto al sistema $P(yz)$, la velocità di Q dipende anche dagli integrali:

$$\int_\tau \frac{\gamma}{\varepsilon} d\tau_0 \quad , \quad \int_\tau \frac{\beta}{\varepsilon} d\tau_0 . \tag{2}$$

In questi, le funzioni integrande hanno un ordine di grandezza non trascurabile, anzi maggiore di quello che spetta alla quantità $\log \varepsilon$ che sola figura nella velocità (1) di P_0. In tal modo, i termini dipendenti dagli integrali (2) recano bensì un contributo risultante nullo alla velocità di P_0, ma non già un contributo nullo al movimento da cui è animato singolarmente ogni punto Q. Il movimento intestino di τ produrrà in generale una deformazione trasversale di $\mathcal{A}$, uno svasamento. S'intende allora che le nostre considerazioni (come del resto quelle degli altri autori) valgono fino a che la sezione di $\mathcal{A}$ non abbia subìto tale dilatazione da non poterlo più assimilare ad un filetto propriamente detto.

3. Variando il tempo, il tubetto $\mathcal{A}$ in generale si deforma e con esso la direttrice $\mathfrak{T}$ e la sezione che abbiamo indicato con τ. Sia λ un parametro generico atto a individuare, in un tempo determinato t, la posizione d'un

[1] Questo valore è metà di quello dato dal Weingarten. La discordanza tra l'un valore e l'altro va attribuita al fatto (come mi fece osservare il prof. T. Levi-Civita) che, nel calcolo della funzione di corrente, il Weingarten trascura, di fronte a termini asintotici, un'espressione cui compete effettivamente un valore finito g, mentre non si può dire che altrettanto ne accada per le derivate. Veramente, nei termini asintotici va ancora considerato il contributo che recano tali derivate. Tenendone conto, si troverebbe il valore sopra riportato.

punto sulla direttrice. Se riguardiamo τ come una sezione generica di $\mathcal{A}$ (condotta normalmente ai punti di $\mathfrak{T}$ e avente per equazione $\lambda =$ costante), τ sarà da ritenersi funzione dei parametri λ e t.

Ora, dalle (1) si scorge come il moto di $\mathcal{A}$, considerato pure come moto d'insieme, dipenda non solo dalla natura geometrica di $\mathfrak{T}$, ma anche dalla grandezza e forma delle sezioni normali. Tale dipendenza è rappresentata analiticamente dal fattore $\frac{Ik}{2\pi}$, essendosi posto per brevità:

$$k = \frac{1}{\tau^2} \int_\tau d\tau \int_\tau \log \frac{1}{\varepsilon} \, d\tau_0 .$$

Si noti che k va in generale risguardata come una funzione di λ e t pel tramite di τ, mentre $\frac{1}{2\pi}$ deve considerarsi come una pura costante, tale essendo, come è ben noto, l'intensità del filetto.

Formando la derivata di k rapporto a t, si riconosce ch'essa non può superare

$$M\omega ;$$

dove M è una quantità positiva che resta finita anche quando la sezione del filetto si faccia decrescere indefinitamente, ed ω rappresenta la grandezza del vortice nel punto P.

D'altra parte, designando con δ la massima corda di τ, k è manifestamente più grande di

$$\log \frac{1}{\delta} .$$

Così, il rapporto di grandezza tra $\frac{dk}{dt}$ e k è determinato dalla natura del rapporto

$$\frac{\omega}{\log \frac{1}{\delta}} .$$

A tal punto osserviamo che, mentre $\log \frac{1}{\delta}$ va ingrandendosi senza limite all'impiccolirsi indefinitamente di δ, il vortice ω resta sempre una quantità, sulla cui grandezza è possibile qualunque ipotesi. Di solito si suppone che, decrescendo δ, ω aumenti in modo che la semi-intensità I (costante per un *determinato* filetto, ma non indipendente dalle sezioni trasversali, cioè in definitiva da δ) conservi un valore finito. Tale ipotesi non è però sostan-

ziale. Nelle considerazioni finora svolte, l'intensità ω del vortice è stata sempre trattata come una funzione (finita e continua) del posto, indipendente da δ. Nulla vieta pertanto di ammettere in particolare che il rapporto $\dfrac{\omega}{\log \frac{1}{\delta}}$ converga a zero assieme a δ. Sotto tale ipotesi potremo porre:

$$\frac{dk}{dt} = 0,$$

ossia è lecito considerare k come una costante rispetto al tempo.

Quanto alla dipendenza di k dal parametro λ, si dimostra che, se inizialmente si assume come parametro λ l'arco s della curva $\mathfrak{T}$, ciò sèguita a sussistere per qualunque tempo t. Il filetto è dunque inestendibile.

Indicando con apice la derivazione rispetto a λ, o meglio ad s, se T dinota la torsione di $\mathfrak{T}$ nel punto P, le equazioni intrinseche del moto di A sono:

$$\frac{2\pi}{\mathrm{I}} \frac{dc}{dt} = \{kc\mathrm{T}\}' + \mathrm{T} \,.\, \{kc\}'',$$

$$\frac{2\pi}{\mathrm{I}} \frac{d\mathrm{T}}{dt} = -k \left\{ \frac{c''}{c} - \mathrm{T}^2 \right\}' - kcc' - \left\{ \frac{2k'c'}{c} - k'' \right\}' - k'c^2 \,.$$

$$\frac{dk}{dt} = 0 \,.$$

E se inizialmente k è costante rispetto ad s, ciò che avviene in particolare per vortici di spessore uniforme, dalle precedenti si ottiene:

$$\frac{dc}{dt} = c\mathrm{T}' + 2c'\mathrm{T},$$

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = -cc' + \left\{ \mathrm{T}^2 - \frac{c''}{c} \right\}' .$$

Queste sono le equazioni da me date nella Memoria citata. La presente Nota le giustifica dal lato fisico e ne precisa le condizioni di validità. Particolarmente è lecito assimilare un filetto vorticoso ad una linea, quando inizialmente esso abbia la forma d'un tubo a sezione costante in grandezza e forma, ed il vortice ω in un punto di questa abbia un ordine di grandezza inferiore a $\log \frac{1}{\delta}$, δ misurando la massima corda della sezione stessa.