ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVI.

1909

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XVIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1909

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Comunicazioni pervenute all'Accademia sino al 15 *agosto* 1909.

Matematica. — *Sopra certe equazioni integrali.* Nota del Socio S. PINCHERLE.

Nel fascicolo del 16 maggio a. c. di questi Rendiconti (pag. 493 e seg.) il dott. U. Crudeli ha pubblicato un contributo alla risoluzione dell'equazione funzionale:

$$\varphi(y) - z\int_a^b \left\{ A(x\,,y)\frac{d\varphi(x)}{dx} + B(x\,,y)\,\varphi(x)\right\} dx = f(y). \tag{1}$$

che, come avverte l'A., era stata studiata dai professori Fubini e Lauricella per il caso di $z=1$.

La soluzione dell'equazione (1), data dal dott. Crudeli, è espressa da una serie di potenze del parametro z, i cui coefficienti sono le iterate dell'operazione rappresentata dall'integrazione definita che figura nell'equazione stessa, operazione e iterate che vanno applicate alla funzione nota $f(y)$. Ora, non mi sembra fuori di luogo di fare notare come codesta serie non sia altro che la

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\, A^n(f) \tag{2}$$

che ho proposta [1] per la risoluzione dell'equazione

$$\varphi - zA(\varphi) = f\,, \tag{3}$$

[1] Rendic. della R. Accad. dei Lincei, ser. 5ª, t. XIV, 1905, pag. 366; Mem. della R. Accad. delle Scienze di Bologna, ser. 6ª, t. III, 1906.

dove A è un'operazione lineare univoca e continua qualunque, tale che per gli elementi f dello spazio funzionale che si considera sia

$$|A^n(f)| < \frac{1}{g^n},$$

dove g è un numero positivo. La validità dello sviluppo (2) ha luogo sotto la condizione

$$|z| < g. \tag{4}$$

Che l'operazione che figura in (1), cioè

$$A = \int_a^b \left\{ A(x, y) \frac{d\varphi(x)}{dx} + B(x, y)\, \varphi(x) \right\} dx$$

goda delle proprietà indicate, risulta manifesto dalle condizioni poste dall'A. all'inizio della sua Nota e dal principio della pag. 495.

La serie della forma (2) serve anche, in modo analogo, alla risoluzione dell'equazione funzionale più generale:

$$\varphi(y) - z \int_a^b \sum_{\nu=0}^{m} A_\nu(x \,.\, y) \frac{d^\nu \varphi(x)}{dx^\nu}\, dx = f(y), \tag{5}$$

le $A_\nu(x, y)$ essendo funzioni soggette alle solite condizioni.

Non si deve però omettere una avvertenza essenziale: se la serie (2) ha il vantaggio di mostrare il carattere analitico della soluzione dell'equazione (3), e se ne fornisce effettivamente la soluzione e ne prova l'unicità per valori del parametro z abbastanza piccoli in valore assoluto, occorrono, come è ben noto, altri sussidî per prolungare la soluzione ai valori di z non soddisfacenti alla (4). Ed è appunto nel fornire un tale sussidio che risiede l'importanza del metodo di Fredholm per la sua classica equazione funzionale — la (5) in cui è supposto $m = 0$ [1]. Ora, che questo metodo sia estensibile dall'equazione di Fredholm all'equazione (5) e quindi anche alla (1), è mostrato in un notevole lavoro di E. Bounitzky [2] evidentemente sfuggito al dott. Crudeli; a dir vero, il Bounitzky tratta l'equazione (5) per il caso di $z = 1$, ma l'estensione a z qualunque e la conseguente formazione della funzione analitica che dà la soluzione al variare di z, non presenta alcuna difficoltà.

[1] Circa ad ipotesi che permettono il prolungamento della funzione analitica definita dalla serie (4) nel caso di operazioni lineari generali, v. la citata Memoria del t. III. delle Mem. dell'Accademia di Bologna.

[2] Bulletin des Sciences mathématiques, ser. 2ª, t. XXXII, pag. 14 (1908).