# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCVII.

1910

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XIX.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1910

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 6 febbraio 1910.*

P. Blaserna, Presidente.


## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Meccanica.** — *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* Nota del Socio Vito Volterra.

### § 1. — La funzione intera $V(z|x, y)$.

Abbiasi la funzione continua $S_0(x, y)$ definita per i valori di $x, y$ tali che

$$0 < x < y < a$$

e sia

$$|S_0(x, y)| < M.$$

Si costruiscano col processo iterativo che ho dato per la risoluzione delle equazioni integrali [1] le funzioni $S_i(x, y)$ definite da

$$S_i(x, y) = \int_x^y S_{j-1}(x, \xi)\, S_{i-j}(\xi, y)\, d\xi. \tag{1}$$

Avremo

$$|S_i(x, y)| < \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!},$$

[1] *Sulla inversione degli integrali definiti*, Rend. R. Acc. dei Lincei, volume V, 1° sem., 1896.

quindi la funzione

$$\text{(I)} \qquad V(z|x\,,y) = \sum_0^\infty{}_n \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} S_n(x\,,y)$$

sarà una funzione olomorfa di $z$ in tutto il piano complesso.

Teorema I. *Qualunque sia il numero positivo $\alpha$ avremo*

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{V(z|x\,,y)}{e^{\alpha|z|}} = 0\,.$$

Infatti

$$|V(z|x\,,y)| \leq \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!}\,.$$

Ora scelto $\varepsilon$ comunque piccolo potremo determinare $m$ in modo che si abbia

$$\frac{M^{m+n+1}(y-x)^{m+n+1}}{(m+n)!} < \varepsilon\, \alpha^{m+n+1} \quad (n = 0\,,1\,,2 \ldots \infty)\,.$$

quindi

$$|V(z|x\,,y)| < \sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!} + \varepsilon \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \alpha^{m+n+1}\,,$$

d'altra parte

$$e^{\alpha|z|} = \sum_0^\infty{}_n \frac{|\alpha z|^n}{n!} > \sum_0^\infty{}_n \frac{|z|^{m+n+1}}{(m+n+1)!} \alpha^{m+n+1}$$

e per conseguenza

$$\frac{|V(z|x\,,y)|}{e^{\alpha|z|}} < \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\sum_0^\infty \frac{|z|^{m+n+1}\alpha^{m+n+1}}{(m+n+1)!}} <$$

$$< \varepsilon + \frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}}\,.$$

Ma noi possiamo prendere $|z|$ così grande che l'ultimo termine

$$\frac{\sum_0^{m-1}{}_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!}}{\frac{|z|^{m+1}\alpha^{m+1}}{(m+1)!}} = \sum_0^{m-1} \frac{(m+1)!}{|z|^{m-n}} \frac{M^{n+1}(y-x)^n}{n!(n+1)!\,\alpha^{m+1}}$$

si riduca minore di una quantità piccola ad arbitrio e perciò col crescere indefinito di $|z|$ la quantità $\frac{V(z|x,y)}{e^{\alpha|z|}}$ tenderà a zero.

Corollario. — *Posto* $V\left(\log\frac{\varrho}{r}|x,y\right)$ *con* $\varrho$ *e* $r$ *reali e positivi, se* $\varrho$ *cresce indefinitamente (oppure tende a* 0), V *si manterrà finita, oppure diverrà infinita di ordine inferiore a qualsiasi potenza positiva di* $\varrho$ $\left(\textit{oppure di } \frac{1}{\varrho}\right)$.

## § 2. — Il teorema d'addizione della funzione $V(z|x,y)$.

Si eseguisca il prodotto

$$V(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y)$$

avremo

$$=\sum_0^\infty{}_n \sum_0^n{}_i \frac{z^{i+1}\,u^{n+1-i}}{(i+1)!\,(n+1-i)!}\,S_i(x,\xi)\,S_{n-i}(\xi,y)$$

quindi

$$\int_x^y V(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y)\,d\xi=\sum_0^\infty{}_n S_{n+1}(x,y)\sum_0^n{}_i \frac{z^{i+1}\,u^{n+1-i}}{(i+1)!\,(n+1-i)!}=$$

$$=\sum_0^\infty{}_n S_n(x,y)\frac{(z+u)^{n+1}}{(n+1)!}-\sum_0^\infty{}_n S_n(x,y)\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}-\sum_0^\infty{}_n S_n(x,y)\frac{u^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Tenendo dunque presente la (I) avremo il

Teorema II. *La funzione olomorfa* $V(z|x,y)$ *gode del seguente teorema di addizione*

$$\text{(A)}\quad V(z+u|x,y)-V(z|x,y)-V(u|x,y)=\int_x^y V(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y)\,d\xi.$$

Posto

$$\frac{\partial V(z|x,y)}{\partial z}=V'(z|x,y)\quad,\quad\frac{\partial^2 V(z|x,y)}{\partial z^2}=V''(z|x,y),\ldots$$

si hanno le formule che si deducono facilmente dalla (A)

$$\text{(2)}\quad \begin{aligned} &V'(z+u|x,y)-V'(z|x,y)=\\ &=\int_x^y V'(z|x,\xi)\,V(u|\xi,y)\,d\xi=\int_x^y V'(z|\xi,y)\,V(u|x,\xi)\,d\xi \end{aligned}$$

$$(3)\quad \mathrm{V}^{(i+h+1)}(z+u|x\,,y)=\int_x^y \mathrm{V}^{(i)}(z|x\,,\xi)\,\mathrm{V}^{(h)}(u|\xi\,,y)\,d\xi \quad (i\,,h=1\,,2\,,3...)$$

$$(4)\quad \begin{aligned}&\mathrm{V}'(z|x\,,y)-\mathrm{V}'(0|x\,,y)=\\&=\int_x^y \mathrm{V}(z|x\,,\xi)\,\mathrm{V}'(0|\xi\,,y)\,d\xi=\int_x^y \mathrm{V}(z|\xi\,,y)\,\mathrm{V}'(0|x\,,\xi)\,d\xi\end{aligned}$$

$$(4')\quad \begin{aligned}&\mathrm{V}'(z|x\,,y)-\mathrm{S}_0(x\,,y)=\\&=\int_x^y \mathrm{V}(z|x\,,\xi)\,\mathrm{S}_0(\xi\,,y)\,d\xi=\int_x^y \mathrm{V}(z|\xi\,,y)\,\mathrm{S}_0(x\,,\xi)\,d\xi\,.\end{aligned}$$

Reciprocamente può dimostrarsi che il teorema d'addizione (A) individua le funzioni del tipo (I).

## § 3. — Soluzione di una equazione integro-differenziale ausiliaria.

Abbiasi l'equazione integro-differenziale

$$(B)\quad y\,\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial y}+cf(x\,,y)+\int_0^x \mathrm{S}_0(\xi\,,x)\,f(\xi\,,y)\,d\xi=\varphi(x\,,y)$$

in cui $f$ è la funzione incognita, finita e continua per $x$ compreso fra 0 ed $a$ ed $y$ compreso fra 0 e $b$; $c$ è un coefficiente costante positivo, $\mathrm{S}_0(\xi\,,x)$ e $\varphi(x\,,y)$ sono funzioni note, finite e continue. Moltiplicando ambo i membri per $\mathrm{V}(z|x\,,x_1)$ e integrando fra 0 e $x_1$ resulterà

$$\int_0^{x_1}\left[y\,\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial y}+cf(x\,,y)\right]\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,dx+$$
$$+\int_0^{x_1}\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,dx\int_0^x \mathrm{S}_0(\xi\,,x)\,f(\xi\,,y)\,d\xi=\int_0^{x_1}\varphi(x\,,y)\,\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,dx\,.$$

Ma

$$\int_0^{x_1}\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,dx\int_0^x \mathrm{S}_0(\xi\,,x)\,f(\xi\,,y)\,d\xi=$$
$$=\int_0^{x_1} f(\xi\,,y)\,d\xi\int_\xi^{x_1}\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,\mathrm{S}_0(\xi\,,x)\,dx$$

quindi, tenendo conto della (4′),

$$\int_0^{x_1}\left[\left(y\,\frac{\partial f(x\,,y)}{\partial y}+cf(x\,,y)\right)\mathrm{V}(z|x\,,x_1)+f(x\,,y)\,\mathrm{V}'(z|x\,,x_1)\right]dx$$
$$-\int_0^{x_1}\mathrm{S}_0(x\,,x_1)\,f(x\,,y)\,dx=\int_0^{x_1}\varphi(x\,,y)\,\mathrm{V}(z|x\,,x_1)\,dx\,.$$

Il secondo integrale del primo membro si potrà ricavare dalla (B), onde la equazione precedente potrà scriversi

$$y\frac{\partial f(x_1, y)}{\partial y} + cf(x_1, y) + \int_0^{x_1}\left[\left(y\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + cf(x, y)\right)\mathrm{V}(z|x, x_1) + \right.$$
$$\left. + f(x, y)\,\mathrm{V}'(z|x, x_1)\right]dx = \varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,dx.$$

Posto $z = \log\frac{y}{y_1}$ sarà $\mathrm{V}'(z|x, x_1) = y\frac{\partial \mathrm{V}(z|x, x_1)}{\partial y}$, perciò moltiplicando ambo i membri della equazione precedente per $y^{c-1}$ essa si scriverà

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^c f(x_1, y)) + \int_0^{x_1}\frac{\partial}{\partial y}(y^c\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,f(x, y))\,dx =$$
$$= \left[\varphi(x_1, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z\,|x, x_1)\,dx\right]y^{c-1}.$$

Moltiplichiamo ora ambo i membri della equazione precedente per $dy$ ed integriamo fra 0 ed $y_1$. Tenendo conto del corollario stabilito nel § 1, avremo

$$y_1^c f(x_1, y_1) = \int_0^{y_1} y^{c-1}\left[\varphi(x, y) + \int_0^{x_1}\varphi(x, y)\,\mathrm{V}(z|x, x_1)\,dx\right]dy$$

o anche

$$\text{(C)}\quad f(x, y) = \frac{1}{y^c}\int_0^y \eta^{c-1}\left[\varphi(x, \eta) + \int_0^x \varphi(\xi, \eta)\,\mathrm{V}\left(\log\frac{\eta}{y}\,|\,\xi, x\right)d\xi\right]d\eta.$$

Dunque, se la (B) ammette una soluzione finita e continua, questa sarà data dalla (C) e reciprocamente può facilmente riconoscersi che la (C) è finita e continua e soddisfa la (B). Però se togliamo la condizione alla $f$ di esser finita per $y = 0$, la soluzione generale della (B) sarà la somma di due termini, il primo dei quali sarà la espressione (C), ed il secondo sarà

$$\mathrm{F}(x, y) = \left(\frac{y_0}{y}\right)^c\left[\psi(x) + \int_0^x \psi(\xi)\,\mathrm{V}\left(\log\frac{y_0}{y}\,|\,\xi, x\right)d\xi\right],$$

in cui $\psi(x)$ è una funzione arbitraria, mentre si ha

$$\mathrm{F}(x, y_0) = \psi(x).$$

Per le applicazioni che dovremo fare basterà valerci della espressione (C).

## § 4. — Problema della sfera elastica isotropa nel caso ereditario.

In una Nota testè pubblicata [1] ho espresso, nel caso ereditario, le componenti degli spostamenti dei punti di un corpo elastico isotropo mediante le forze di massa, le tensioni superficiali, e gli spostamenti superficiali.

Noi vogliamo ora, pel caso della sfera, eliminare nella soluzione le tensioni superficiali, esprimendo la soluzione stessa mediante gli spostamenti superficiali [2]. Quanto alle forze di massa le supporremo nulle, giacchè sarà facile ricondurre il caso generale a questo caso particolare. La eliminazione potrà farsi anche senza ricorrere alle formule suddette, ma direttamente.

Supposte nulle le forze di massa, le (3) della Nota citata al principio di questo paragrafo, si scriveranno

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} \Delta^2 u = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ \Delta^2 v = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial y} \\ \Delta^2 w = \dfrac{\partial \vartheta}{\partial z}, \end{cases}$$

avendo posto, secondo le notazioni adoperate nella Nota suddetta,

$$\vartheta = (1 - \mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{A}_2)\,\theta .$$

Avremo poi

$$\Delta^2 \vartheta = 0 .$$

In conseguenza di un teorema del prof. Almansi [3], da lui impiegato per la soluzione del problema ordinario della sfera elastica, sarà dunque

$$(5) \qquad \begin{cases} u = \mathrm{U} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ v = \mathrm{V} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ w = \mathrm{W} + (r^2 - \mathrm{R}^2)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

(1) *Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia*, Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 19 dicembre 1909.

(2) *Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità*, § 4, Rend. R. Acc. dei Lincei, seduta del 7 novembre 1909.

(3) *Sulla deformazione della sfera elastica*, Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino, anno 1896-97.

ove U, V, W, $f$ sono funzioni armoniche, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, R è una costante, e

$$\frac{1}{2} f + r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{4} \vartheta. \tag{6}$$

Posta l'origine nel centro della sfera elastica di raggio R, le funzioni U, V, W saranno determinate entro la sfera quando si conosceranno gli spostamenti al contorno.

Scriviamo

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \Theta,$$

avremo allora, in virtù delle (5),

$$\theta = \Theta + 2r \frac{\partial f}{\partial r},$$

quindi

$$\vartheta = (1 - A_1^{-1} A_2) \left( \Theta + 2r \frac{\partial f}{\partial r} \right) \tag{7}$$

ed eliminando $\vartheta$ fra la (6) e la (7), resulterà

$$f + (1 + A_1^{-1} A_2)\, r \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{2} (1 - A_1^{-1} A_2)\, \Theta,$$

da cui segue

$$r \frac{\partial f}{\partial r} + A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = \frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2)\, \Theta. \tag{8}$$

Poniamo, supponendo per semplicità $t_0 = 0$,

$$A_1 (A_1 + A_2)^{-1} f = c f(t, r) + \int_0^t S_0(\tau, t)\, f(\tau, r)\, d\tau$$

$$\frac{1}{2} (A_1 + A_2)^{-1} (A_1 - A_2)\, \Theta = \Phi(t, r).$$

$S_0(\tau, t)$ e $\Phi(t, r)$ saranno funzioni che si calcolano facilmente e che quindi possono supporsi note e inoltre sarà

$$c = \frac{K}{L + 3K}.$$

Nelle formule precedenti $f$ e $\Phi$ vanno considerate come funzioni di $t$, del raggio vettore $r$ e dei due angoli polari, avendo cambiato le coordinate

cartesiane $x, y, z$ in quelle polari. Però, per semplicità, sono state scritte solo esplicitamente le due variabili $t$ e $r$.

La (8) si scriverà dunque

$$r\frac{\partial f(t,r)}{\partial r}+cf(t,r)+\int_0^t S_0(\tau,t)\,f(\tau,r)\,d\tau=\Phi(t,r).$$

Posto poi

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}=f_3\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=\varphi_1\\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=\varphi_2\\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}=\varphi_3\end{cases}$$

per una formula del prof. Almansi [1] avremo

$$r\frac{\partial f_i(t,r)}{\partial r}+(c+1)\,f_i(t,r)+\int_0^t S_0(\tau,t)\,f_i(\tau,r)\,d\tau=\varphi_i(t,r)$$
$$(i=1,2,3).$$

Applichiamo ora la (C). Si avrà

$$f_i=\frac{1}{r^{c+1}}\int_0^r \varrho^c\left[\varphi_i(t,\varrho)+\int_0^t \varphi_i(\tau,\varrho)\,V\left(\log\frac{\varrho}{r}\,|\,\tau,t\right)d\tau\right]d\varrho$$
$$(i=1,2,3),$$

e quindi

(III) $\quad u=U+(r^2-R^2)\,f_1\ ,\ v=V+(r^2-R^2)\,f_2\ ,\ w=W+(r^2-R^2)\,f_3$

saranno determinate completamente.

## Astronomia. — *Osservazioni della cometa 1910 a fatte all'Osservatorio al Collegio Romano.* Nota del Socio E. Millosevich.

La cometa fu veduta, sembra per la prima volta, all'alba nello Stato libero d'Orange; in ogni modo fu segnalata telegraficamente alle Astronomische Nachrichten di Kiel il 17 gennaio (t. civile) al mattino dai signori Worssell e Innes da Johannesburg. La prima esatta posizione è in data 17 gennaio $0^h8^m.6$ di Johannesburg. Io ebbi la ventura di trovare l'astro il 17 gennaio a $23^h24^m$ R.C.R a $2^\circ.7$ di distanza dal lembo solare. Nucleo e testa della cometa misuravano un diametro di 15″ e vi erano indizi di coda. La prima osservazione in Europa, dopo la mia, spetta all'Osservatorio di Vienna.

[1] Loco cit. § 2.